Theorie der Informatik

G. Röger
Frühjahrssemester 2019

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 11

Abgabe: Mittwoch, 15. Mai 2019

Aufgabe 11.1 (Polynomielle Reduktion, 2.5 + 0.5 Punkte)
Betrachten Sie das Entscheidungsproblem 3Coloring:

- *Gegeben:* ungerichteter Graph $G = \langle V, E \rangle$
- *Gefragt:* Gibt es eine totale Funktion $f : V \to \{r, g, b\}$ mit $f(v) \neq f(w)$ für alle $\{v, w\} \in E$?

sowie das Entscheidungsproblem 3SAT:

- *Gegeben:* Eine aussagenlogische Formel φ in konjunktiver Normalform mit der Einschränkung, dass jede Klausel aus *höchstens* 3 Literalen besteht
- *Gefragt:* Ist φ erfüllbar?

(a) Zeigen Sie, dass 3Coloring $\leq_p$ 3SAT gilt.

(b) Was können wir aus (a) und der NP-Vollständigkeit von 3SAT für 3Coloring schliessen?

Aufgabe 11.2 (NP-Vollständigkeit, 2+2 Punkte)
Betrachten Sie das Entscheidungsproblem HittingSet:

- *Gegeben:* Eine endliche Menge T, eine Menge von Mengen $S = \{S_1, \dots, S_n\}$ mit $S_i \subseteq T$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, eine natürliche Zahl $K \in \mathbb{N}_0$ mit $K \leq |T|$.
- *Gefragt:* Gibt es eine Menge H mit höchstens K Elementen, die mindestens ein Element aus jeder Menge aus S enthält?

(a) Zeigen Sie, dass HittingSet in NP liegt, indem Sie einen nicht-deterministischen Algorithmus für HittingSet angeben, dessen Laufzeit durch ein Polynom in $n|T|$ beschränkt ist.

(b) Beweisen Sie, dass HittingSet NP-vollständig ist. Sie dürfen dabei ohne Beweis verwenden, dass das Problem VertexCover (aus Kapitel E4) NP-vollständig ist.

Aufgabe 11.3 (NP-Härte, 3 Punkte)
Betrachten Sie die folgenden Entscheidungsprobleme:

IndSet:

- *Gegeben:* ungerichteter Graph $G = \langle V, E \rangle$, Zahl $k \in \mathbb{N}_0$
- *Gefragt:* Enthält G eine unabhängige Menge der Grösse k oder mehr,
d.h. eine Knotenmenge $I \subseteq V$ mit $|I| \geq k$ und $\{u, v\} \notin E$ für alle $u, v \in I$?

SetPacking:

- *Gegeben:* endliche Menge M, Menge $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ mit $S_i \subseteq M$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, Zahl $k \in \mathbb{N}_0$
- *Gefragt:* Gibt es $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ mit $|\mathcal{S}'| \geq k$, so dass alle Mengen in $\mathcal{S}'$ paarweise disjunkt sind, d.h. für alle $S_i, S_j \in \mathcal{S}'$ mit $S_i \neq S_j$ gilt $S_i \cap S_j = \emptyset$?

Beweisen Sie, dass SetPacking NP-hart ist. Sie dürfen dabei verwenden, dass das Problem IndSet NP-vollständig ist.