Theorie der Informatik

G. Röger
Frühjahrssemester 2019

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 3

Abgabe: Mittwoch, 20. März 2019

Aufgabe 3.1 (Widerlegungstheorem; 1.5 Punkte)
Beweisen Sie das Widerlegungstheorem. Zeigen Sie also, dass für beliebige Formelmengen WB und Formeln φ folgendes gilt:

$$\mathrm{WB} \cup \{\varphi\} \text{ ist unerfüllbar gdw. } \mathrm{WB} \models \neg\varphi.$$

Aufgabe 3.2 (Korrektheit des Resolutionkalküls; 1.5 Punkte)
Beweisen Sie die Korrektheit der Resolutionsregel

$$\frac{C_1 \cup \{L\},\ C_2 \cup \{\neg L\}}{C_1 \cup C_2},$$

das heisst zeigen Sie, dass für alle Interpretationsn $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \bigvee_{\ell \in C_1 \cup \{L\}} \ell$ und $\mathcal{I} \models \bigvee_{\ell \in C_2 \cup \{\neg L\}} \ell$ gilt, dass $I \models \bigvee_{\ell \in C_1 \cup C_2} \ell$.

Aufgabe 3.3 (Resolutionskalkül; 3 Punkte)
Betrachten Sie die Wissensbasis

$$\begin{aligned}\mathrm{WB} = \{&(A \leftrightarrow \neg D), (\neg A \rightarrow (B \vee C)), ((A \rightarrow E) \wedge (B \vee C \vee F)), (E \rightarrow (F \rightarrow (B \vee C))),\\ &(C \rightarrow G), (G \rightarrow \neg C)\}.\end{aligned}$$

Verwenden sie den Resolutionskalkül, um zu zeigen, dass $\mathrm{WB} \models (B \wedge \neg C)$.

Aufgabe 3.4 (Prädikatenlogik; 3 Punkte)
Betrachten Sie die folgende prädikatenlogische Formel φ über der Signatur $\langle \{x, y\}, \{\mathrm{c}\}, \{\mathrm{f}, \mathrm{g}\}, \{\mathrm{P}\} \rangle$.

$$\varphi = (\neg \mathrm{P}(\mathrm{c}) \wedge \forall x \exists y\, ((\mathrm{f}(y) = \mathrm{g}(x)) \wedge \mathrm{P}(y)))$$

Geben Sie ein Modell $\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ mit $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$ von φ an und *beweisen* Sie, dass $\mathcal{I} \models \varphi$. Warum ist es nicht notwendig, eine Variablenbelegung α zu spezifieren, um ein Modell von φ anzugeben?

Aufgabe 3.5 (Prädikatenlogik; 1 Punkt)
Betrachten Sie die Formel φ über einer Signatur mit den Prädikatsymbolen P (1-stellig), Q (2-stellig) und R (3-stellig), dem 1-stelligen Funktionssymbol f, dem Konstantensymbol c und den Variablensymbolen x, y und z.

$$\varphi = (\forall x \exists y\, (\mathrm{P}(z) \rightarrow \mathrm{Q}(y, x)) \vee \neg \exists y\, \mathrm{R}(\mathrm{c}, x, \mathrm{f}(y)))$$

Markieren Sie die freien Variablenvorkommen in φ. Geben Sie *zusätzlich* die Menge der freien Variablen von φ an (ohne Beweis).