Theorie der Informatik

G. Röger
Frühjahrssemester 2019

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 1

Abgabe: Mittwoch, 27. Februar 2019

Hinweis: In diesem Übungsblatt sollen Sie das korrekte Formulieren von Beweisen üben. Ein formal korrekter Beweis besteht aus einzelnen Schritten, von denen jeder *unmittelbar* aus den Schritten davor oder den Vorraussetzungen hervorgeht (zum Beispiel wenn einen Wert durch seine Definition ersetzt wird). Schreiben Sie bitte die Beweise ausführlich und formal auf. Beispiele dafür finden Sie in den Vorlesungsfolien.

Aufgabe 1.1 (2 Punkte)

Zeigen Sie mit einem direkten Beweis: Für alle endlichen Menge S gilt, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(S)$ Kardinalit $2^{|S|}$ hat.

Aufgabe 1.2 (2 Punkte)

Beweisen Sie mit einem Beweis durch Widerspruch, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: Wenn $n + 7$ eine Primzahl ist, dann ist n keine Primzahl.

Hinweis: 2 ist die einzige gerade Primzahl.

Aufgabe 1.3 (1 + 2 Punkte)

(a) Beweisen Sie per vollständiger Induktion, dass $n! > 2^n$ für alle $n \geq 4$.

(b) Beweisen Sie per Induktion über die Anzahl n der Elemente von S, dass für jede endliche Menge S die Potenzmenge $\mathcal{P}(S)$ Kardinalit $2^{|S|}$ hat.

Aufgabe 1.4 (3 Punkte)

Wir definieren zunächst induktiv eine einfache Teilmenge von mathematischen Ausdrücken, die nur die Zeichen „N“, „Z“, „$\oplus$“, „$\otimes$“, „$\llbracket$“ und „$\rrbracket$“ verwenden. Die Menge $\mathcal{E}$ der *einfachen Ausdrücke* ist induktiv wie folgt definiert:

- N und Z sind einfache Ausdrücke.
- Wenn x und y einfache Ausdrücke sind, dann ist auch $\llbracket x \otimes y \rrbracket$ ein einfacher Ausdruck.
- Wenn x und y einfache Ausdrücke sind, dann ist auch $\llbracket x \oplus y \rrbracket$ ein einfacher Ausdruck.

Beispiele für einfache Ausdrücke: Z, $\llbracket \mathtt{Z} \otimes \mathtt{N} \rrbracket$, $\llbracket \llbracket \mathtt{Z} \otimes \mathtt{Z} \rrbracket \oplus \llbracket \mathtt{N} \oplus \mathtt{Z} \rrbracket \rrbracket$
Ausserdem definieren wir eine Funktion $f : \mathcal{E} \to \mathbb{N}_0$ als

- $f(\mathtt{N}) = 0$, $f(\mathtt{Z}) = 2$
- $f(\llbracket x \otimes y \rrbracket) = f(x) \cdot f(y)$
- $f(\llbracket x \oplus y \rrbracket) = f(x) + f(y)$

Also zum Beispiel: $f(\mathtt{Z}) = 2$, $f(\llbracket \mathtt{Z} \otimes \mathtt{N} \rrbracket) = f(\mathtt{Z}) \cdot f(\mathtt{N}) = 2 \cdot 0 = 0$, $f(\llbracket \llbracket \mathtt{Z} \otimes \mathtt{Z} \rrbracket \oplus \llbracket \mathtt{N} \oplus \mathtt{Z} \rrbracket \rrbracket) = 6$.

Beweisen Sie durch strukturelle Induktion, dass für jeden einfachen Ausdruck $x \in \mathcal{E}$ gilt, dass

$$f(x) \text{ ist gerade.}$$