Theorie der Informatik

G. Röger
Frühjahrssemester 2019

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Präsenzaufgaben 10 — Lösungen

Aufgabe 10.1

Die folgenden Aussagen sind alle falsch. Erklären Sie jeweils mit 1–2 Sätzen, warum die Aussagen nicht zutreffen und wie sie korrekt heissen müssten.

(a) Um zu zeigen, dass ein Problem X NP-vollständig ist, reicht es zu zeigen, dass $X \in \mathrm{NP}$ und $X \leq_{\mathrm{p}} Y$ für ein NP-vollständiges Problem Y.

Lösung:

Damit X NP-vollständig ist, muss $X \in \mathrm{NP}$ sein und X muss NP-hart sein. NP-Härte kann man zum Beispiel zeigen, indem man ein anderes NP-hartes Problem auf X reduziert (die NP-Härte folgt dann mit Transitivität der Reduktionen, siehe Aufgabe 13.2 (a)). In der Aufgabe ist die Richtung der Reduktion falschrum: es sollte $Y \leq_{\mathrm{p}} X$ statt $X \leq_{\mathrm{p}} Y$ heissen.

(b) Es gibt ein NP-vollständiges Problem X für das es einen effizienten deterministischen Algorithmus gibt, auch wenn es für SAT keinen gibt.

Lösung:

Wenn es für X einen solchen Algorithmus gibt, kann SAT effizient gelöst werden, indem SAT auf X reduziert wird. Das ist möglich, da SAT $\in$ NP und da X NP-hart ist. Für jedes NP-vollständige Problem X gilt also: entweder es gibt für X und SAT effiziente Algorithmen ($\mathrm{P} = \mathrm{NP}$) oder für keines der beiden Probleme ($\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$).

(c) Für jedes NP-harte Problem X gilt $X \leq_{\mathrm{p}}$ SAT.

Lösung:

Es gibt Probleme, die NP-hart sind, aber nicht in NP liegen. Da SAT NP-hart ist, gilt für alle Probleme $X \in \mathrm{NP}$, dass $X \leq_{\mathrm{p}}$ SAT. NP-harte Probleme ausserhalb von NP können aber nicht auf SAT reduziert werden (sonst wären sie in NP).

(d) Existiert ein Problem $X \in \mathrm{P}$, so dass $X \leq_{\mathrm{p}} Y$ für irgendein NP-vollständiges Problem Y, dann gilt $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.

Lösung:

Wegen $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$ gilt für alle Probleme $X \in \mathrm{P}$ und NP-harten (und damit auch alle NP-vollständigen) Probleme Y, dass $X \leq_{\mathrm{p}} Y$. Die Gleichheit $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ würde jedoch aus $Y \leq_{\mathrm{p}} X$ folgen, da X dann NP-vollständig und in P wäre.