Theorie der Informatik

G. Röger
Frühjahrssemester 2019

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Präsenzaufgaben 8 — Lösungen

Aufgabe 8.1

Diese Aufgabe stammt aus der Klausur von 2017.

Betrachten Sie die folgenden Entscheidungsprobleme:

DirHamiltonPath:

- *Gegeben:* gerichteter Graph $G = \langle V, E \rangle$
- *Gefragt:* Enthält G einen Hamiltonpfad?

DirHamiltonPathWithStartPoint:

- *Gegeben:* gerichteter Graph $G = \langle V, E \rangle$, Startknoten $v_\mathrm{s} \in V$
- *Gefragt:* Enthält G einen Hamiltonpfad mit Startknoten v_s, also einen Hamiltonpfad $\pi = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ mit $v_1 = v_\mathrm{s}$?

(a) Zeigen Sie DirHamiltonPathWithStartPoint $\in$ NP, indem Sie einen nichtdeterministischen, polynomiellen Algorithmus angeben.

Lösung:

Ein möglicher Algorithmus wählt zuerst den Startknoten v_s und danach einen beliebigen Konten nach dem anderen aus, ohne einen Konten zu wiederholen, und prüft, ob zwei aufeinanderfolgende Konten durch eine Kante verbunden sind.

$$
\begin{array}{l}
\textit{current} := v_\mathrm{s} \\
\textit{remaining} := V \setminus \{v_\mathrm{s}\} \\
\text{WHILE } \textit{remaining} \neq \emptyset : \\
\quad \text{GUESS } \textit{next} \in \textit{remaining} \\
\quad \text{IF } \langle \textit{current}, \textit{next} \rangle \notin E \text{ THEN REJECT} \\
\quad \textit{remaining} := \textit{remaining} \setminus \{\textit{next}\} \\
\quad \textit{current} := \textit{next} \\
\text{ACCEPT}
\end{array}
$$

(b) Beweisen Sie, dass DirHamiltonPathWithStartPoint NP-hart ist. Sie dürfen dabei verwenden, dass das Problem DirHamiltonPath NP-vollständig ist.

Lösung:

Wir müssen zeigen, dass DirHamiltonPath $\leq_\mathrm{p}$ DirHamiltonPathWithStartPoint. Das bedeutet, wenn wir ein Lösungsverfahren für das Entscheidungsproblem DirHamiltonPathWithStartPoint kennen, dann können wir wie folgt bestimmen, ob ein gegebener Graph $G = \langle V, E \rangle$ einen Hamiltonpfad enthält: Wir konstruieren einen Graphen G', der identisch zu G ist, aber zusätzlich einen Knoten v_0' und Kanten von v_0' zu allen anderen Knoten enthält. Graph G enthält einen Hamiltonpfad, genau dann wenn der neue Graph G' einen Hamiltonpfad enthält, der mit v_0' startet. Graph G' lässt sich offensichlich in polynomieller Zeit aus dem Graphen G konstruieren.

Formal:

$$f(\langle V, E\rangle) = \langle G', u\rangle,$$

wobei u ein neuer Knoten ist, und G' der Graph mit Knoten $V' = V \cup \{u\}$ und Kanten $E' = E \cup \{\langle u, v\rangle \mid v \in V\}$.

Die Funktion f ist total und in polynomieller Zeit berechenbar (es werden nur ein Knoten und $|V|$ Kanten hinzugefügt). Wir beweisen nun die beiden Richtungen der Reduktionseigenschaft.

Wenn $G = \langle V, E\rangle \in$ DirHamiltonPath, gibt es einen Hamiltonpfad $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ in G. Dann ist $\langle u, v_1, \ldots, v_n\rangle$ ein Hamiltonpfad in $G' = \langle V', E'\rangle$. Kanten zwischen v_i und v_{i+1} existieren dabei für alle $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ in E' weil sie in E existieren und $E \subseteq E'$. Die Kante zwischen u und v_1 existiert in E' egal welcher Knoten v_1 ist. Es werden alle $n+1$ Knoten aus V' genau einmal besucht, da $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ alle Knoten aus V genau einmal besucht, und da $V' = V \cup \{u\}$ und $u \neq v$ für alle $v \in V$. Da es einen Hamiltonpfad in G' gibt, der mit u beginnt, ist $f(G) = \langle G', u\rangle \in$ DirHamiltonPathWithStartPoint.

Wenn $f(G) = \langle G', u\rangle \in$ DirHamiltonPathWithStartPoint, gibt es einen Hamiltonpfad $\langle u, v_1, \ldots, v_n\rangle$ in G', der mit u beginnt. Dann ist $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ ein Hamiltonpfad in G. Die Kanten zwischen v_i und v_{i+1} existieren dabei für alle $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ in E weil sie in E' existieren und weil $v_i \neq u$ (alle Kanten in $E' \setminus E$ starten mit u). Es werden alle n Knoten aus V genau einmal besucht, da $\langle u, v_1, \ldots, v_n\rangle$ alle Knoten aus V' genau einmal besucht, und da $V' = V \cup \{u\}$. Da es einen Hamiltonpfad in G gibt, ist $G \in$ DirHamiltonPath.

Zur Erinnerung: Ein *Hamiltonpfad* in einem Graphen $\langle V, E\rangle$ ist eine Knotenfolge $\pi = \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$, die einen Pfad definiert ($\langle v_i, v_{i+1}\rangle \in E$ für alle $1 \leq i < n$) und jeden Knoten des Graphen genau einmal enthält.