## Theorie der Informatik

G. Röger
Frühjahrssemester 2019

Universität Basel
Fachbereich Informatik

# Präsenzaufgaben 7 — Lösungen

### Aufgabe 7.1

Welche Turingmaschine $M_w$ kodiert folgendes Wort?

$$w = 1111001100110011011110100111100110100110011010011001111001101110111001101$$

Ist $w \in K$, d.h. terminiert $M_w$ bei Eingabe $w$?

**Lösung:**

Wir transformieren $w$ zunächst in ein Wort $w'$ über $\Sigma' = \{0, 1, \#\}$. Hierzu betrachten wir von vorne nach hinten je zwei Symbole und ersetzen sie gemäss $\{11 \mapsto \#, 00 \mapsto 0, 01 \mapsto 1\}$:

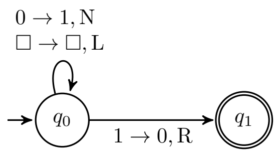
$$w' = \#\#0\#0\#0\#1\#10\#\#0\#10\#0\#10\#0\#\#0\#1\#1\#0\#1$$

Das Wort kodiert drei Transitionsübergänge:

- ##0#0#0#1#10: $\delta(q_0, 0) = (q_0, 1, N)$
- ##0#10#0#10#0: $\delta(q_0, \Box) = (q_0, \Box, L)$
- ##0#1#1#0#1: $\delta(q_0, 1) = (q_1, 0, R)$

Der Startzustand ist (per Definition) $q_0$. Zustand $q_1$ ist ein terminierender Zustand, da es keine ausgehenden Transitionen gibt.

$M_w$:




Auf Eingabe $w$ ersetzt $M_w$ die erste 1 durch eine 0, bewegt den Kopf nach rechts und geht in einen Endzustand. Die Maschine hält also an und es folgt $w \in K$.

### Aufgabe 7.2

Es gelte dass $A \leq B$ für zwei Probleme $A$ und $B$. Was folgt für

(a) $B$, wenn $A$ entscheidbar ist?

(b) $B$, wenn $A$ semi-entscheidbar ist?

(c) $B$, wenn $A$ unentscheidbar ist?

(d) $B$, wenn $A$ nicht semi-entscheidbar ist?

(e) $A$, wenn $B$ entscheidbar ist?

(f) $A$, wenn $B$ semi-entscheidbar ist?

(g) $A$, wenn $B$ unentscheidbar ist?

(h) $A$, wenn $B$ nicht semi-entscheidbar ist?

**Lösung:**

(a) nichts

(b) nichts

(c) $B$ ist unentscheidbar

(d) $B$ ist nicht semi-entscheidbar

(e) $A$ ist entscheidbar

(f) $A$ ist semi-entscheidbar

(g) nichts

(h) nichts

**Aufgabe 7.3**
Das *Äquivalenzproblem* ÄQUIVALENZ für allgemeine (Typ-0) Grammatiken ist definiert als:

Gegeben zwei allgemeine Grammatiken $G_1$ und $G_2$, ist $\mathcal{L}(G_1) = \mathcal{L}(G_2)$?

Beweisen Sie, dass ÄQUIVALENZ unentscheidbar ist, indem Sie LEERHEIT darauf reduzieren. Das *Leerheitsproblem* LEERHEIT für allgemeine (Typ-0) Grammatiken ist definiert als:

Gegeben eine allgemeine Grammatik $G$, ist $\mathcal{L}(G) = \emptyset$?

(Die Unentscheidbarkeit von LEERHEIT wird im nächsten Übungsblatt gezeigt.)
**Lösung:**
Sei $G_\emptyset$ eine beliebige Grammatik mit $\mathcal{L}(G_\emptyset) = \emptyset$, z.B. eine Grammatik ohne Regeln. Sei $f$ die Funktion mit $f(G) = (G, G_\emptyset)$ für alle $G$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} G \in \textsc{Leerheit} \text{ gdw. } & \mathcal{L}(G) = \emptyset \\ \text{gdw. } & \mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G_\emptyset) \\ \text{gdw. } & (G, G_\emptyset) \in \textsc{Äquivalenz} \\ \text{gdw. } & f(G) \in \textsc{Äquivalenz} \end{aligned}$$

Die Funktion $f$ ist total und berechenbar und reduziert LEERHEIT auf ÄQUIVALENZ. Da LEERHEIT unentscheidbar ist, ist auch ÄQUIVALENZ unentscheidbar.