Theorie der Informatik

G. Röger
Frühjahrssemester 2019

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Präsenzaufgaben 1 — Lösungen

Aufgabe 1.1 (Formalisierung in Aussagenlogik)

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen als aussagenlogische Formeln. Definieren Sie hierzu geeignete atomare Aussagen.

(a) „Wenn die Ampel rot ist, dann darf das Auto nicht fahren."

(b) „Das Auto darf genau dann fahren, wenn die Ampel nicht rot ist und kein Fußgänger auf der Strasse ist."

Lösung:

(a) $(\text{AmpelRot} \rightarrow \neg\text{AutoDarfFahren})$

(b) $(\text{AutoDarfFahren} \leftrightarrow (\neg\text{AmpelRot} \wedge \neg\text{Fußgänger}))$

Aufgabe 1.2 (Wahrheitstafeln)

Sei $A = \{\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}\}$ eine Menge von aussagenlogischen Variablen und $\varphi = ((\mathrm{X} \wedge \mathrm{Y}) \rightarrow \mathrm{Z})$ eine aussagenlogische Formel über A. Geben Sie die Wahrheitstafel für φ an.

Entscheiden Sie anhand der Wahrheitstafel, ob φ erfüllbar, unerfüllbar, (allgemein-)gültig und/oder falsifizierbar ist.

Lösung:

$\mathcal{I}(\mathrm{X})$	$\mathcal{I}(\mathrm{Y})$	$\mathcal{I}(\mathrm{Z})$	$\mathcal{I} \models (\mathrm{X} \wedge \mathrm{Y})$	$\mathcal{I} \models ((\mathrm{X} \wedge \mathrm{Y}) \rightarrow \mathrm{Z})$
0	0	0	Nein	Ja
0	0	1	Nein	Ja
0	1	0	Nein	Ja
0	1	1	Nein	Ja
1	0	0	Nein	Ja
1	0	1	Nein	Ja
1	1	0	Ja	Nein
1	1	1	Ja	Ja

Es gilt $\{\mathrm{X} \mapsto 0, \mathrm{Y} \mapsto 0, \mathrm{Z} \mapsto 0\} \models \varphi$, also ist die Formel erfüllbar und nicht unerfüllbar.
Wegen $\{\mathrm{X} \mapsto 1, \mathrm{B} \mapsto Y, \mathrm{Z} \mapsto 0\} \not\models \varphi$ ist sie falsifizierbar und damit nicht allgemeingültig.

Aufgabe 1.3 (Semantik der Aussagenlogik)

Sei $\varphi = ((\mathrm{X} \wedge \mathrm{Y}) \vee \neg\mathrm{X})$ eine aussagenlogische Formel über $\{\mathrm{X}, \mathrm{Y}\}$. Betrachten Sie die Interpretation $\mathcal{I} = \{\mathrm{X} \mapsto 1, \mathrm{Y} \mapsto 1\}$ für $\{\mathrm{X}, \mathrm{Y}\}$ und verwenden Sie die Semantik der Aussagenlogik, um zu zeigen, dass $\mathcal{I}$ ein Modell von φ (d.h. $\mathcal{I} \models \varphi$) ist.

Lösung:

Wegen $\mathcal{I}(\mathrm{X}) = 1$ gilt, dass $\mathcal{I} \models \mathrm{X}$. Analog wissen wir wegen $\mathcal{I}(\mathrm{Y}) = 1$, dass $\mathcal{I} \models \mathrm{Y}$. Mit der Semantik der Konjunktion $\wedge$ können wir daraus folgern, dass $\mathcal{I} \models (\mathrm{X} \wedge \mathrm{Y})$ gilt. Mit der Semantik der Disjunktion $\vee$ ergibt sich daraus direkt, dass $\mathcal{I} \models ((\mathrm{X} \wedge \mathrm{Y}) \vee \neg\mathrm{X}) = \varphi$ (das ist unabhängig davon, ob $\mathcal{I} \models \neg\mathrm{X}$ gilt oder nicht, es ist also unnötig zu zeigen, dass $\mathcal{I} \not\models \neg\mathrm{X}$).

Aufgabe 1.4 (Eigenschaften aussagenlogischer Formeln)

Zeigen Sie *ohne* Wahrheitstafel, dass $\varphi = (\mathrm{A} \rightarrow (\mathrm{B} \leftrightarrow \mathrm{C}))$ falsifizierbar ist. Ist φ allgemeingültig?

Lösung:

Wir betrachten die folgende Belegung $\mathcal{I} = \{\mathrm{A} \mapsto 1, \mathrm{B} \mapsto 1, \mathrm{C} \mapsto 0\}$. Da $\mathcal{I}(\mathrm{C}) = 0$, gilt $\mathcal{I} \not\models \mathrm{C}$. Da $\mathcal{I}(\mathrm{B}) = 1$, gilt $\mathcal{I} \models \mathrm{B}$ und damit $\mathcal{I} \not\models \neg\mathrm{B}$. Zusammen ergeben die Aussagen mit der Semantik der Disjunktionen $\mathcal{I} \not\models (\neg\mathrm{B} \vee \mathrm{C})$. Mit der Semantik der Konjunktionen folgt $\mathcal{I} \not\models ((\neg\mathrm{B} \vee \mathrm{C}) \wedge (\neg\mathrm{C} \vee \mathrm{B}))$. Die kann man abkürzend als $\mathcal{I} \not\models ((\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{C}) \wedge (\mathrm{C} \rightarrow \mathrm{B}))$ oder noch kürzer als $\mathcal{I} \not\models (\mathrm{B} \leftrightarrow \mathrm{C})$ (1) schreiben.
Da $\mathcal{I}(\mathrm{A}) = 1$, gilt $\mathcal{I} \models \mathrm{A}$. Mit der Semantik der Negation folgt $\mathcal{I} \not\models \neg\mathrm{A}$ (2). Mit der Semantik für Disjunktionen folgt aus (1) und (2) $\mathcal{I} \not\models (\neg\mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \leftrightarrow \mathrm{C}))$, was man kürzer als $\mathcal{I} \not\models (\mathrm{A} \rightarrow (\mathrm{B} \leftrightarrow \mathrm{C}))$ schreiben kann.
Die Belegung $\mathcal{I}$ erfüllt also die Formel φ nicht, daher ist φ falsifizierbar und damit nicht allgemeingültig.