Algorithmen und Datenstrukturen

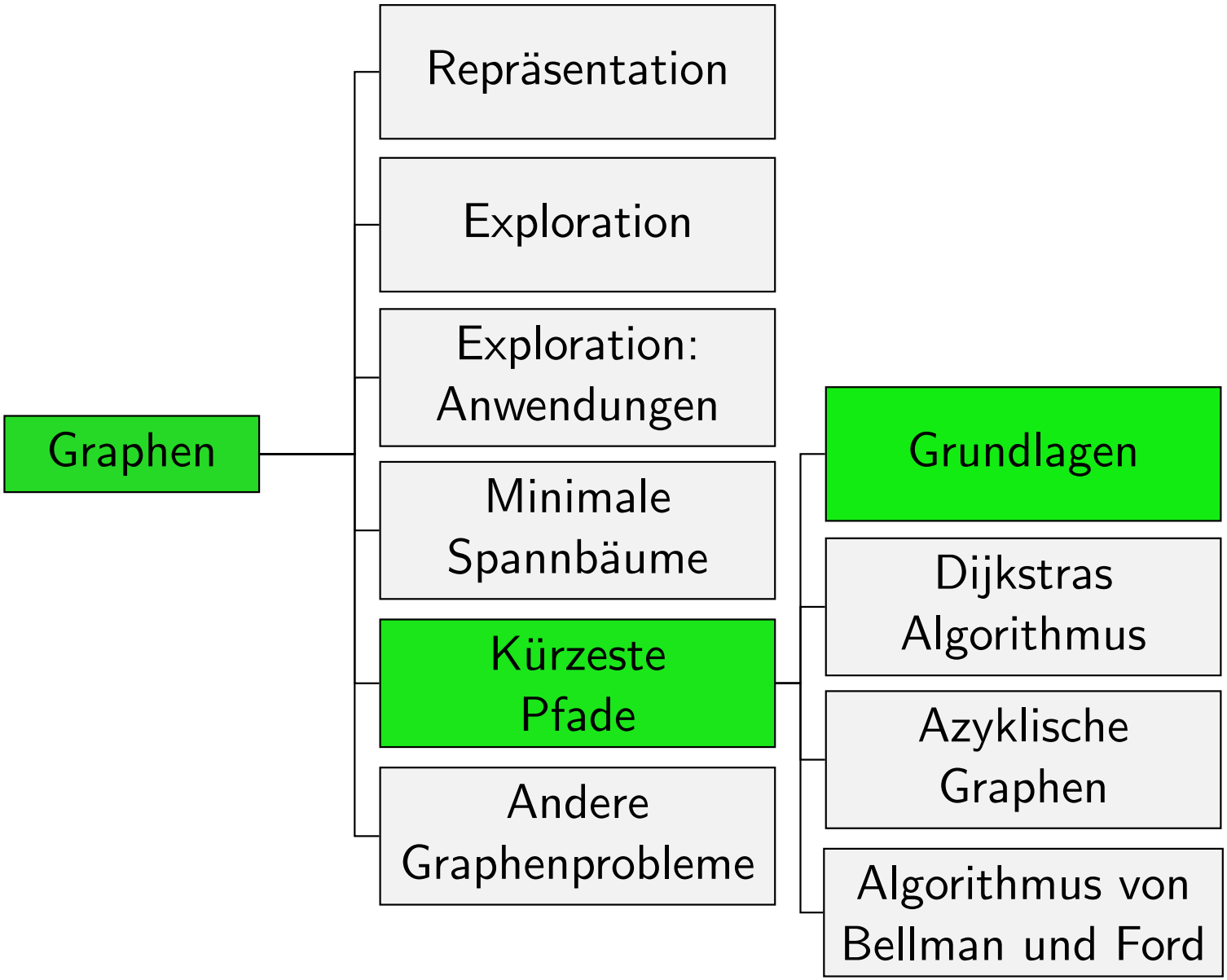
C5. Kürzeste Pfade: Grundlagen

Gabriele Röger

Universität Basel

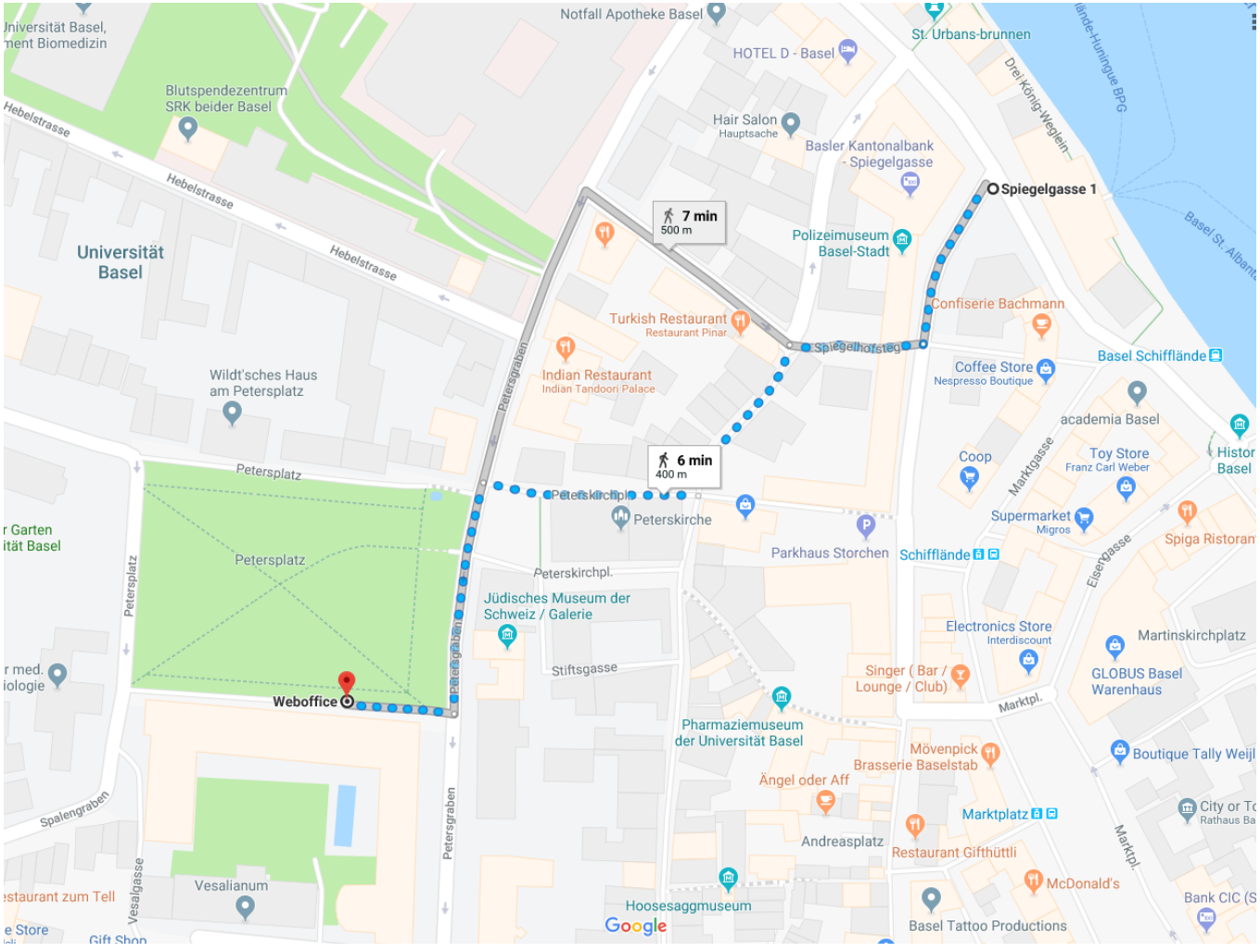
9. Mai 2019

Graphen: Übersicht



Einführung

Google Maps


Universität Basel
Blutspendezentrum SRK beider Basel
Hebelstrasse
Notfall Apotheke Basel
HOTEL D - Basel
St. Urbans-brunnen
Hair Salon
Hauptsache
Basler Kantonalbank - Spiegelgasse
Spiegelgasse 1
7 min
500 m
Polizeimuseum Basel-Stadt
Turkish Restaurant
Restaurant Pinar
Indian Restaurant
Indian Tandoori Palace
Spiegelhofsteg
Confiserie Bachmann
Basel Schifflände
Coffee Store
Nespresso Boutique
academia Basel
Wildt'sches Haus am Petersplatz
Petersplatz
Petersgraben
6 min
400 m
Peterskirchpl.
Peterskirche
Coop
Toy Store
Franz Carl Weber
Marktgasse
Supermarket
Migros
Parkhaus Storchen
Schifflände
Spiga Ristoran
Eisengasse
Peterskirchpl.
Jüdisches Museum der Schweiz / Galerie
Electronics Store
Interdiscount
Martinskirchplatz
GLOBUS Basel Warenhaus
Stiftsgasse
Singer (Bar / Lounge / Club)
Marktpl.
Weboffice
Pharmaziemuseum der Universität Basel
Mövenpick Brasserie Baselstab
Boutique Tally Weijl
Ängel oder Aff
Marktplatz
Andreasplatz
Restaurant Gifthüttli
McDonald's
Spalengraben
Vesalianum
Vesalgasse
Hoosesaggmuseum
Basel Tattoo Productions
Google

Inhaltsabhängige Bildverzerrung (Seam Carving)

Anwendungen

- Routenplanung
- Pfadplanung in Computerspielen
- Roboternavigation
- Seam Carving
- Handlungsplanung
- Typesetting in TeX
- Routingprotokolle in Netzwerken (OSPF, BGP, RIP)
- Routing von Telekommunikationsnachrichten
- Verkehrsplanung
- Ausnutzen von Arbitrage-Möglichkeiten in Wechselkursen

Quelle (teilweise): Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications,
R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin, Prentice Hall, 1993

Varianten

Was interessiert uns?

- Single source: von einem Knoten s zu allen anderen Knoten
- Single sink: von allen Knoten zu einem Knoten t
- Source-sink: von Knoten s zu Knoten t
- All pairs: von jedem Knoten zu jedem anderen

Varianten

Was interessiert uns?

- Single source: von einem Knoten s zu allen anderen Knoten
- Single sink: von allen Knoten zu einem Knoten t
- Source-sink: von Knoten s zu Knoten t
- All pairs: von jedem Knoten zu jedem anderen

Grapheigenschaften

- Beliebige / nicht-negative / euklidische Gewichte
- Beliebige / nicht-negative / keine Zyklen

Grundlagen

Gewichtete gerichtete Graphen

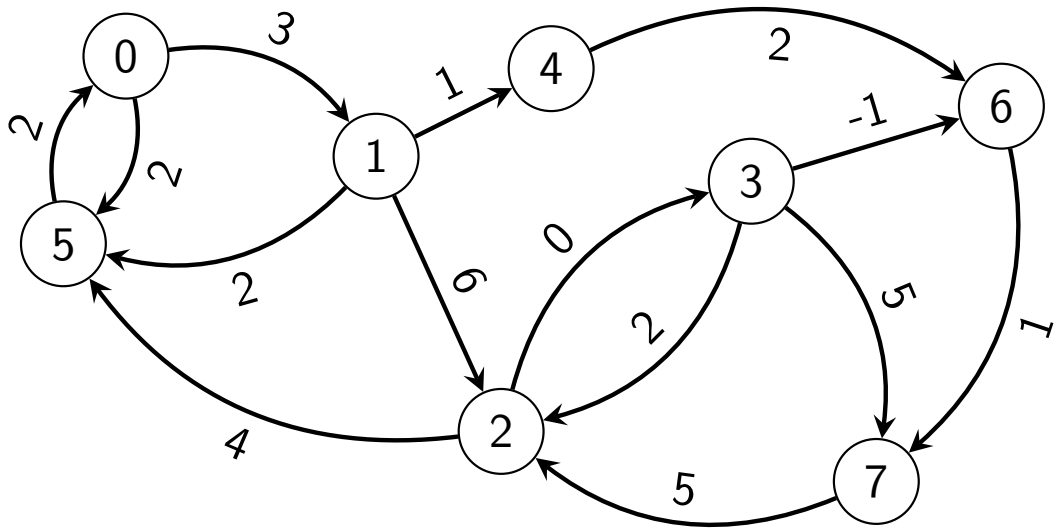
Die (high-level) Definition gewichteter Graphen bleibt gleich, wir betrachten jetzt aber gerichtete Graphen.

Gewichtete gerichtete Graphen

Die (high-level) Definition gewichteter Graphen bleibt gleich, wir betrachten jetzt aber gerichtete Graphen.

Gewichteter Graph

Bei einem (kanten-)gewichteter Graph hat jede Kante $e \in E$ ein Gewicht (oder Kosten) $weight(e)$ aus den reellen Zahlen.



Erinnerung: Ein gerichteter Graph heisst auch Digraph.

API für gewichtete, gerichtete Kante

```
1   class DirectedEdge:
2     # Kante von n1 zu n2 mit Gewicht w
3     def __init__(n1: int, n2: int, w: float) -> None
4
5     # Gewicht der Kante
6     def weight() -> float
7
8     # Knoten, von dem Kante ausgeht
9     def from_node() -> int
10
11    # Knoten, zu dem die Kante führt
12    def to_node() -> int
```

API für gewichtete Digraphen

```
1   class EdgeWeightedDigraph:
2     # Graph mit no_nodes Knoten und keinen Kanten
3     def __init__(no_nodes: int) -> None
4
5     # Füge gewichtete Kante hinzu
6     def add_edge(e: DirectedEdge) -> None
7
8     # Anzahl der Knoten
9     def no_nodes() -> int
10
11    # Anzahl der Kanten
12    def no_edges() -> int
13
14    # Alle Kanten, die von n ausgehen
15    def adjacent_edges(n: int) -> Generator[DirectedEdge]
16
17    # Alle Kanten
18    def all_edges() -> Generator[DirectedEdge]
```

Kürzeste-Pfade-Problem

Kürzeste-Pfade-Problem mit einem Startknoten, SSSP

- Gegeben: Graph und Startknoten s
- Anfrage für Knoten v
  - Gibt es Pfad von s nach v?
  - Wenn ja, was ist der kürzeste Pfad?

Engl. single-source shortest paths problem

Kürzeste-Pfade-Problem

Kürzeste-Pfade-Problem mit einem Startknoten, SSSP

- Gegeben: Graph und Startknoten s
- Anfrage für Knoten v
  - Gibt es Pfad von s nach v?
  - Wenn ja, was ist der kürzeste Pfad?
- In kantengewichteten Graphen:
  Kürzester Pfad ist der mit dem geringstem Gewicht
  (= minimale Summe der Kantenkosten)

Engl. single-source shortest paths problem

API für Kürzeste-Pfade-Implementierungen

Die Algorithmen für kürzeste Pfade sollen folgendes Interface implementieren:

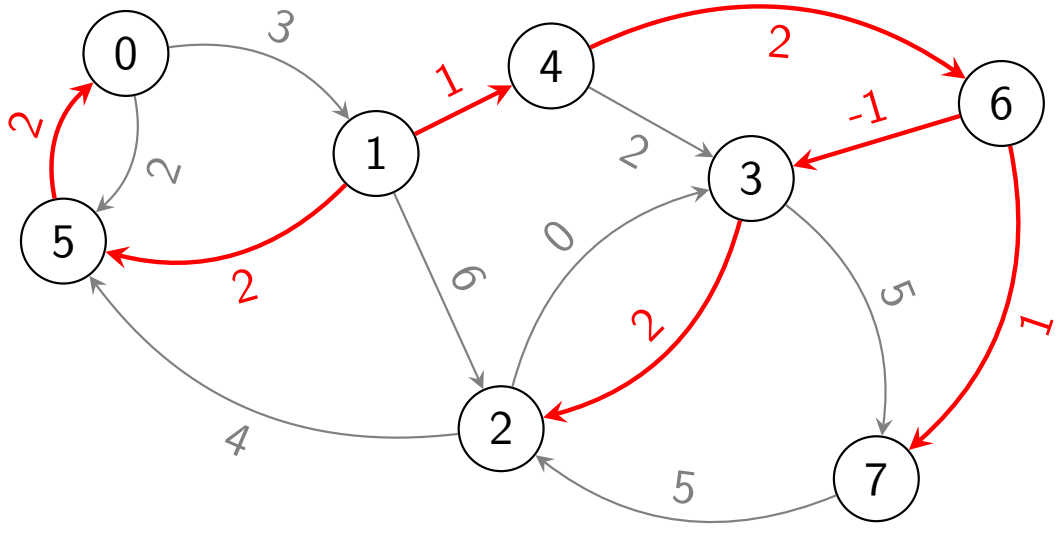
```
1  class ShortestPaths:
2    # Konstruktor mit Startknoten s
3    def __init__(graph: EdgeWeightedDigraph, s: int) -> None
4
5    # Abstand von s zu v; infinity, falls kein Pfad existiert
6    def dist_to(v: int) -> float
7
8    # Gibt es Pfad von s zu v?
9    def has_path_to(v: int) -> bool
10
11   # Pfad von s zu v; None, falls keiner vorhanden
12   def path_to(v: int) -> Generator[DirectedEdge]
```

Kürzeste-Pfade-Baum

Kürzeste-Pfade-Baum

Für einen kantengewichteten Digraphen G und Knoten s ist ein Kürzeste-Pfade-Baum ein Teilgraph, der

- einen gerichteten Baum mit Wurzel s bildet,
- alle von s aus erreichbaren Knoten enthält, und
- bei dem jeder Baumpfad ein kürzester Pfad in G ist.



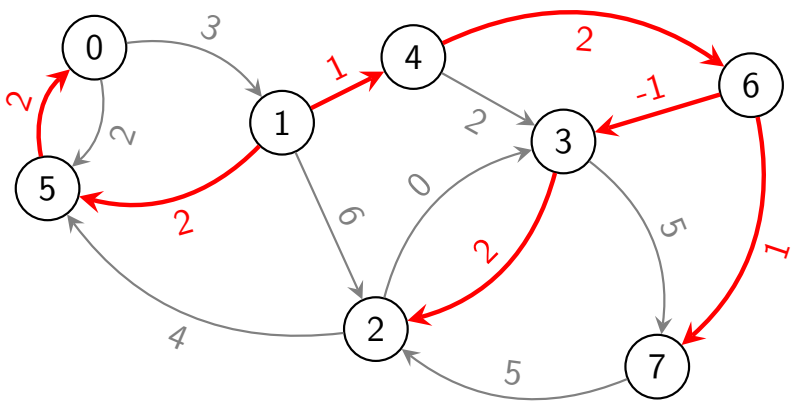
Kürzeste-Pfade-Baum: Repräsentation

Repräsentation: knotenindizierte Arrays

- `parent` mit Elternknotenreferenz
  Leer für nicht erreichbare und Startknoten
- `distance` mit Abstand vom Startknoten
  ∞ für nicht erreichbare Knoten

	0	1	2	3	4	5	6	7
`parent`	5		3	6	1	1	4	6

	0	1	2	3	4	5	6	7
`distance`	4	0	4	2	1	2	3	4



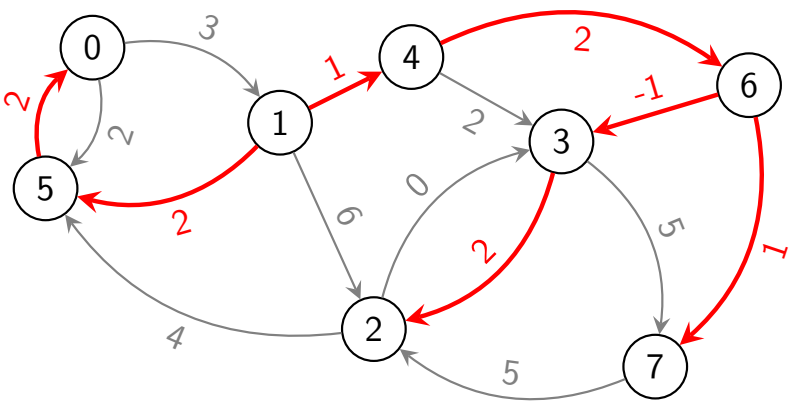
Kürzeste-Pfade-Baum: Repräsentation

Repräsentation: knotenindizierte Arrays

- `parent` mit Elternknotenreferenz
  Leer für nicht erreichbare und Startknoten
- `distance` mit Abstand vom Startknoten
  ∞ für nicht erreichbare Knoten

	0	1	2	3	4	5	6	7
`parent`	5		3	6	1	1	4	6

	0	1	2	3	4	5	6	7
`distance`	4	0	4	2	1	2	3	4



Was ist mit parallelen Kanten?

Extraktion der kürzesten Pfade

```
1     def path_to(self, node):
2         if self.distance[node] == float('inf'):
3             yield None
4         elif node == self.start:
5             yield node
6         else:
7             # output path form start to parent node
8             self.path_to(self.parent[node])
9             # finish with node
10            yield node
```

Kantenrelaxierung

Kantenrelaxierung für Kante (u, v)

- `distance[u]`: Länge des kürzesten bekannten Pfades zu u
- `distance[v]`: Länge des kürzesten bekannten Pfades zu v
- `parent[v]`: Vorgänger in letzter Kante des kürzesten bekannten Weges zu v

Illustration: Tafel

Kantenrelaxierung

Kantenrelaxierung für Kante (u, v)

- `distance[u]`: Länge des kürzesten bekannten Pfades zu u
- `distance[v]`: Länge des kürzesten bekannten Pfades zu v
- `parent[v]`: Vorgänger in letzter Kante des kürzesten bekannten Weges zu v
- Ermöglicht Kante (u, v) einen kürzeren Weg zu v (durch u)?
- Dann update `distance[v]` und `parent[v]`.

Illustration: Tafel

Kantenrelaxierung

```
1     def relax(self, edge):
2         u = edge.from_node()
3         v = edge.to_node()
4         if self.distance[v] > self.distance[u] + edge.weight():
5             self.parent[v] = u
6             self.distance[v] = self.distance[u] + edge.weight()
```

Optimalitätskriterium und Generisches Verfahren

Optimalitätskriterium

Theorem

Sei G ein gewichteter Digraph ohne negative Zyklen.
Array `distance[]` *enthält die Kosten der kürzesten Pfade von s genau dann, wenn*

1. $\texttt{distance[s]} = 0$
2. $\texttt{distance}[w] \leq \texttt{distance}[v] + \mathit{weight}(e)$
   für alle Kanten $e = (v, w)$, und
3. *für alle Knoten v ist* $\texttt{distance}[v]$ *die Länge irgendeines Pfades von s zu v bzw. ∞, falls kein solcher Pfad existiert.*

Optimalitätskriterium (Forts.)

Beweis

„$\Rightarrow$“

Da der Graph keine Zyklen mit negativen Gesamtkosten enthält, kann kein Pfad von s zu s negative Kosten haben. Die Kosten des leeren Pfades sind damit optimal und `distance[s]` ist 0.

Optimalitätskriterium (Forts.)

Beweis

„$\Rightarrow$“

Da der Graph keine Zyklen mit negativen Gesamtkosten enthält, kann kein Pfad von s zu s negative Kosten haben. Die Kosten des leeren Pfades sind damit optimal und `distance[s]` ist 0.

Betrachte beliebige Kante e von u nach v.

Der kürzeste Pfad von s nach u hat Kosten `distance[u]`. Erweitern wir diesen Pfad um Kante e, erhalten wir einen Pfad von s zu v mit Kosten `distance[u]` $+$ $\mathit{weight}(e)$. Die Kosten eine kürzesten Pfades von s zu v können also nicht grösser sein und es gilt `distance[v]` $\leq$ `distance[u]` $+$ $\mathit{weight}(e)$. ...

Optimalitätskriterium (Forts.)

Beweis (Fortsetzung).

„$\Leftarrow$“

Für unerreichbare Knoten ist der Wert per Definition unendlich.

Betrachte beliebigen Knoten v und kürzesten Pfad $p = (v_0, \ldots, v_n)$ von s zu v, d.h. $v_0 = s$, $v_n = v$.
Sei e_i jeweils eine günstigste Kante von v_{i-1} zu v_i.
Da alle Ungleichungen erfüllt sind, gilt

$$\begin{aligned} \texttt{distance}[v_n] &\leq \texttt{distance}[v_{n-1}] + \mathit{weight}(e_n) \\ &\leq \texttt{distance}[v_{n-2}] + \mathit{weight}(e_{n-1}) + \mathit{weight}(e_n) \\ \leq \ldots &\leq \mathit{weight}(e_1) + \cdots + \mathit{weight}(e_n) \\ &= \text{ Kosten des optimalen Pfads} \end{aligned}$$

Wegen Punkt 3 ist $\texttt{distance}[v_n]$ auch nicht echt kleiner als die optimalen Pfadkosten. □

Generischer Algorithmus

Generischer Algorithmus für Startknoten s

- Initialisiere $\texttt{distance}[s] = 0$ und $\texttt{distance}[v] = \infty$ für alle anderen Knoten
- Solange das Optimalitätskriterium nicht erfüllt ist: Relaxiere eine beliebige Kante

Korrekt:

- Endliches `distance[v]` entspricht immer den Kosten eines Pfades von s zu v.
- Jede erfolgreiche Relaxierung reduziert `distance[v]` für ein v.
- Für jeden Knoten kann Distanz nur endlich oft reduziert werden.