Algorithmen und Datenstrukturen

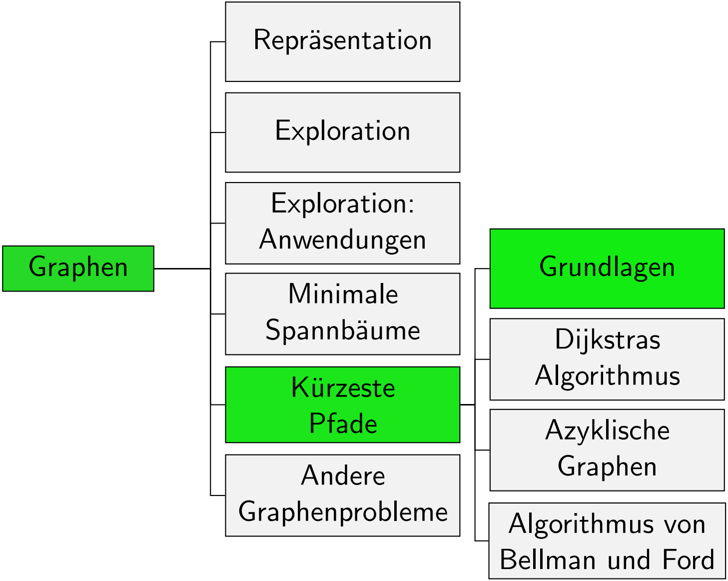
C5. Kürzeste Pfade: Grundlagen

Gabriele Röger

Universität Basel

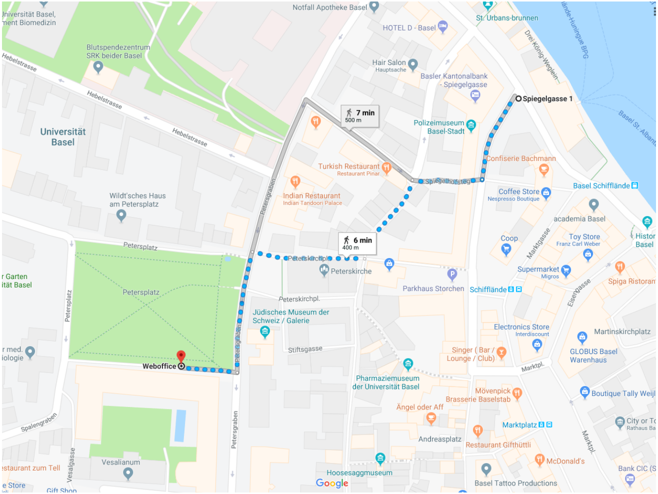
9. Mai 2019

Graphen: Übersicht



C5.1 Einführung

Google Maps


Notfall Apotheke Basel
St. Urbans-brunnen
HOTEL D - Basel
Blutspendezentrum
SRK beider Basel
Hebelstrasse
Hair Salon
Hauptsache
Basler Kantonalbank
- Spiegelgasse
Spiegelgasse 1
7 min
500 m
Universität
Basel
Polizeimuseum
Basel-Stadt
Turkish Restaurant
Restaurant Pinar
Confiserie Bachmann
Spiegelhofsteg
Indian Restaurant
Indian Tandoori Palace
Wildt'sches Haus
am Petersplatz
Coffee Store
Nespresso Boutique
Basel Schifflände
academia Basel
Petersgraben
6 min
400 m
Coop
Toy Store
Franz Carl Weber
Petersplatz
Peterskirchpl.
Peterskirche
Parkhaus Storchen
Schifflände
Supermarket
Migros
Spiga Ristoran
Marktgasse
Eisengasse
Jüdisches Museum der
Schweiz / Galerie
Electronics Store
Interdiscount
Martinskirchplatz
Stiftsgasse
Singer (Bar /
Lounge / Club)
GLOBUS Basel
Warenhaus
Weboffice
Marktpl.
Pharmaziemuseum
der Universität Basel
Mövenpick
Brasserie Baselstab
Boutique Tally Weijl
Ängel oder Aff
Spalengraben
Marktplatz
Andreasplatz
Restaurant Gifthüttli
McDonald's
Vesalianum
Vesalgasse
Hoosesaggmuseum
Basel Tattoo Productions
Bank CIC (S
Google

Inhaltsabhängige Bildverzerrung (Seam Carving)

Anwendungen

- Routenplanung
- Pfadplanung in Computerspielen
- Roboternavigation
- Seam Carving
- Handlungsplanung
- Typesetting in TeX
- Routingprotokolle in Netzwerken (OSPF, BGP, RIP)
- Routing von Telekommunikationsnachrichten
- Verkehrsplanung
- Ausnutzen von Arbitrage-Möglichkeiten in Wechselkursen

Quelle (teilweise): Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications,
R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin, Prentice Hall, 1993

Varianten

Was interessiert uns?

- Single source: von einem Knoten s zu allen anderen Knoten
- Single sink: von allen Knoten zu einem Knoten t
- Source-sink: von Knoten s zu Knoten t
- All pairs: von jedem Knoten zu jedem anderen

Grapheigenschaften

- Beliebige / nicht-negative / euklidische Gewichte
- Beliebige / nicht-negative / keine Zyklen

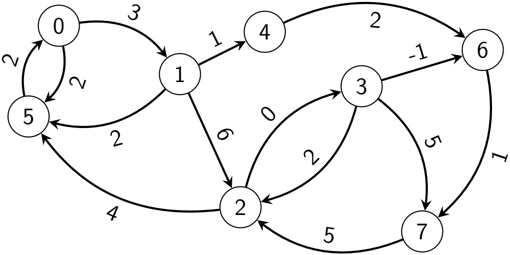
C5.2 Grundlagen

Gewichtete gerichtete Graphen

Die (high-level) Definition gewichteter Graphen bleibt gleich, wir betrachten jetzt aber gerichtete Graphen.

Gewichteter Graph

Bei einem (kanten-)gewichteter Graph hat jede Kante $e \in E$ ein Gewicht (oder Kosten) $weight(e)$ aus den reellen Zahlen.



Erinnerung: Ein gerichteter Graph heisst auch Digraph.

API für gewichtete, gerichtete Kante

```
class DirectedEdge:
  # Kante von n1 zu n2 mit Gewicht w
  def __init__(n1: int, n2: int, w: float) -> None

  # Gewicht der Kante
  def weight() -> float

  # Knoten, von dem Kante ausgeht
  def from_node() -> int

  # Knoten, zu dem die Kante führt
  def to_node() -> int
```

API für gewichtete Digraphen

```
class EdgeWeightedDigraph:
  # Graph mit no_nodes Knoten und keinen Kanten
  def __init__(no_nodes: int) -> None

  # Füge gewichtete Kante hinzu
  def add_edge(e: DirectedEdge) -> None

  # Anzahl der Knoten
  def no_nodes() -> int

  # Anzahl der Kanten
  def no_edges() -> int

  # Alle Kanten, die von n ausgehen
  def adjacent_edges(n: int) -> Generator[DirectedEdge]

  # Alle Kanten
  def all_edges() -> Generator[DirectedEdge]
```

Kürzeste-Pfade-Problem

Kürzeste-Pfade-Problem mit einem Startknoten, SSSP

- Gegeben: Graph und Startknoten s
- Anfrage für Knoten v
  - Gibt es Pfad von s nach v?
  - Wenn ja, was ist der kürzeste Pfad?
- In kantengewichteten Graphen:
  Kürzester Pfad ist der mit dem geringstem Gewicht
  (= minimale Summe der Kantenkosten)

Engl. single-source shortest paths problem

API für Kürzeste-Pfade-Implementierungen

Die Algorithmen für kürzeste Pfade sollen folgendes Interface implementieren:

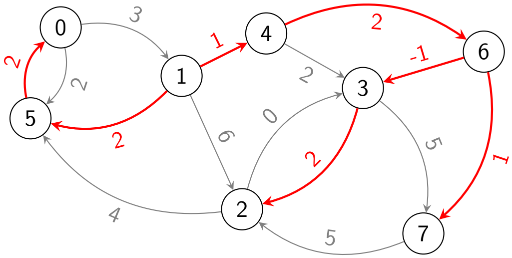
```
class ShortestPaths:
  # Konstruktor mit Startknoten s
  def __init__(graph: EdgeWeightedDigraph, s: int) -> None

  # Abstand von s zu v; infinity, falls kein Pfad existiert
  def dist_to(v: int) -> float

  # Gibt es Pfad von s zu v?
  def has_path_to(v: int) -> bool

  # Pfad von s zu v; None, falls keiner vorhanden
  def path_to(v: int) -> Generator[DirectedEdge]
```

Kürzeste-Pfade-Baum

Kürzeste-Pfade-Baum

Für einen kantengewichteten Digraphen G und Knoten s ist ein Kürzeste-Pfade-Baum ein Teilgraph, der

- einen gerichteten Baum mit Wurzel s bildet,
- alle von s aus erreichbaren Knoten enthält, und
- bei dem jeder Baumpfad ein kürzester Pfad in G ist.

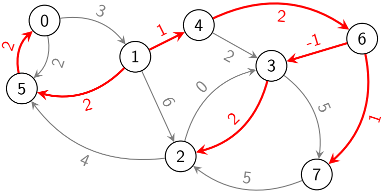


Kürzeste-Pfade-Baum: Repräsentation

Repräsentation: knotenindizierte Arrays

- `parent` mit Elternknotenreferenz
  Leer für nicht erreichbare und Startknoten
- `distance` mit Abstand vom Startknoten
  ∞ für nicht erreichbare Knoten

	0	1	2	3	4	5	6	7
`parent`	5		3	6	1	1	4	6
`distance`	4	0	4	2	1	2	3	4



Was ist mit parallelen Kanten?

Extraktion der kürzesten Pfade

```python
def path_to(self, node):
    if self.distance[node] == float('inf'):
        yield None
    elif node == self.start:
        yield node
    else:
        # output path form start to parent node
        self.path_to(self.parent[node])
        # finish with node
        yield node
```

Kantenrelaxierung

Kantenrelaxierung für Kante (u, v)

- `distance[u]`: Länge des kürzesten bekannten Pfades zu u
- `distance[v]`: Länge des kürzesten bekannten Pfades zu v
- `parent[v]`: Vorgänger in letzter Kante des kürzesten bekannten Weges zu v
- Ermöglicht Kante (u, v) einen kürzeren Weg zu v (durch u)?
- Dann update `distance[v]` und `parent[v]`.

Illustration: Tafel

Kantenrelaxierung

```python
def relax(self, edge):
    u = edge.from_node()
    v = edge.to_node()
    if self.distance[v] > self.distance[u] + edge.weight():
        self.parent[v] = u
        self.distance[v] = self.distance[u] + edge.weight()
```

C5.3 Optimalitätskriterium und Generisches Verfahren

Optimalitätskriterium

Theorem

Sei G ein gewichteter Digraph ohne negative Zyklen. Array `distance[]` enthält die Kosten der kürzesten Pfade von s genau dann, wenn

1. $\texttt{distance[s]} = 0$
2. $\texttt{distance}[w] \leq \texttt{distance}[v] + \mathit{weight}(e)$ *für alle Kanten* $e = (v, w)$, *und*
3. *für alle Knoten v ist $\texttt{distance}[v]$ die Länge irgendeines Pfades von s zu v bzw. ∞, falls kein solcher Pfad existiert.*

Optimalitätskriterium (Forts.)

Beweis

„$\Rightarrow$“

Da der Graph keine Zyklen mit negativen Gesamtkosten enthält, kann kein Pfad von s zu s negative Kosten haben. Die Kosten des leeren Pfades sind damit optimal und `distance[s]` ist 0.

Betrachte beliebige Kante e von u nach v.

Der kürzeste Pfad von s nach u hat Kosten `distance[u]`. Erweitern wir diesen Pfad um Kante e, erhalten wir einen Pfad von s zu v mit Kosten $\texttt{distance[u]} + \mathit{weight}(e)$. Die Kosten eine kürzesten Pfades von s zu v können also nicht grösser sein und es gilt $\texttt{distance[v]} \leq \texttt{distance[u]} + \mathit{weight}(e)$. …

Optimalitätskriterium (Forts.)

Beweis (Fortsetzung).

„$\Leftarrow$“

Für unerreichbare Knoten ist der Wert per Definition unendlich.

Betrachte beliebigen Knoten v und kürzesten Pfad $p = (v_0, \dots, v_n)$ von s zu v, d.h. $v_0 = s$, $v_n = v$.
Sei e_i jeweils eine günstigste Kante von v_{i-1} zu v_i.
Da alle Ungleichungen erfüllt sind, gilt

$$\begin{aligned}
\texttt{distance}[v_n] &\leq \texttt{distance}[v_{n-1}] + \mathit{weight}(e_n) \\
&\leq \texttt{distance}[v_{n-2}] + \mathit{weight}(e_{n-1}) + \mathit{weight}(e_n) \\
\leq \dots &\leq \mathit{weight}(e_1) + \dots + \mathit{weight}(e_n) \\
&= \text{ Kosten des optimalen Pfads}
\end{aligned}$$

Wegen Punkt 3 ist $\texttt{distance}[v_n]$ auch nicht echt kleiner als die optimalen Pfadkosten. $\square$

Generischer Algorithmus

Generischer Algorithmus für Startknoten s

- Initialisiere $\texttt{distance}[s] = 0$ und $\texttt{distance}[v] = \infty$ für alle anderen Knoten
- Solange das Optimalitätskriterium nicht erfüllt ist: Relaxiere eine beliebige Kante

Korrekt:

- Endliches `distance[v]` entspricht immer den Kosten eines Pfades von s zu v.
- Jede erfolgreiche Relaxierung reduziert `distance[v]` für ein v.
- Für jeden Knoten kann Distanz nur endlich oft reduziert werden.