Algorithmen und Datenstrukturen

C2. Graphenexploration: Anwendungen

Gabriele Röger

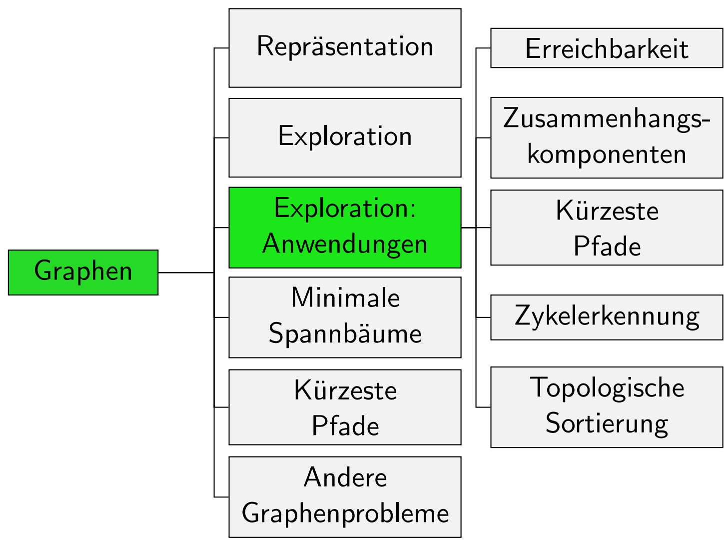
Universität Basel

25. April 2019

Erinnerung: Graphenexploration

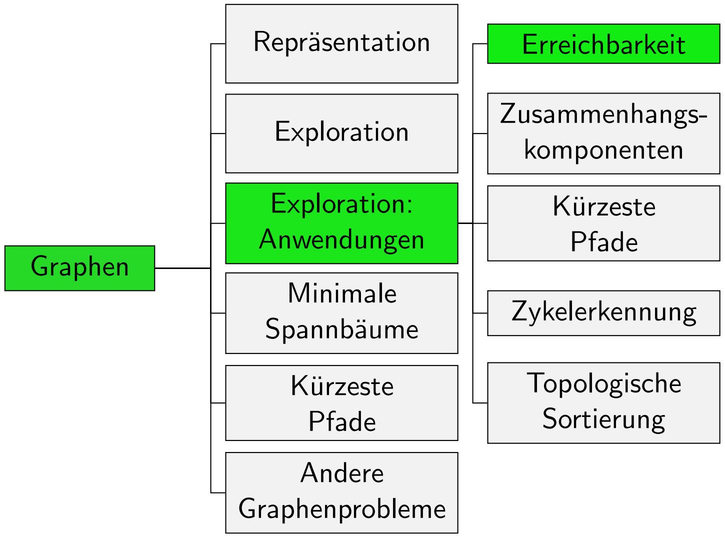
- Aufgabe: Gegeben einen Knoten v, besuche alle Knoten, die von v aus erreichbar sind.
- Wird oft als Teil anderer Graphenalgorithmen benötigt.
- Tiefensuche: erst einmal möglichst tief in den Graphen (weit weg von v)
- Breitensuche: erst alle Nachbarn, dann Nachbarn der Nachbarn, . . .

Graphen: Übersicht



C2.1 Erreichbarkeit

Graphen: Übersicht



Mark-and-Sweep-Speicherbereinigung

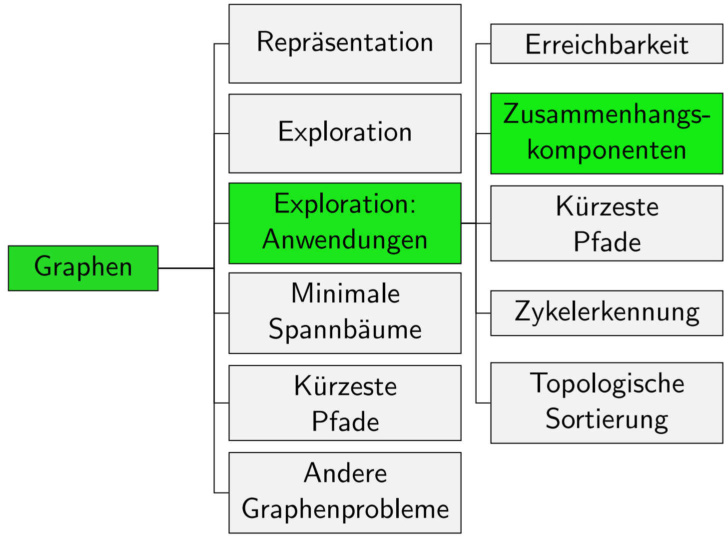
Ziel: Gib Speicherplatz frei, der von nicht mehr zugreifbaren Objekten belegt wird.

- Gerichteter Graph: Objekte als Knoten, Referenzen auf Objekte als Kanten
- Ein Bit pro Objekt für Markierung in Speicherbereinigung
- Mark: Markiere in regelmässigen Abständen alle erreichbaren Objekte.
- Sweep: Gib alle nicht markierten Objekte frei.

Zauberstab in Bildbearbeitung

C2.2 Zusammenhang

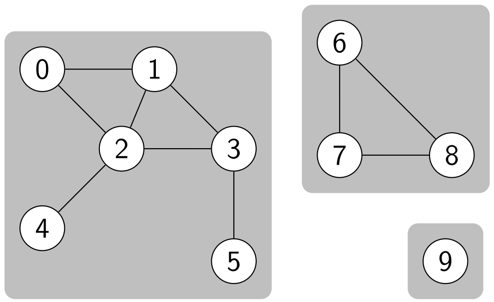
Graphen: Übersicht



Zusammenhangskomponenten ungerichteter Graphen

Ungerichteter Graph

- Zwei Knoten u und v sind in der gleichen Zusammenhangskomponente, wenn es einen Pfad zwischen u und v gibt.



Zusammenhangskomponenten: Interface

Wir möchten folgendes Interface implementieren:

```
class ConnectedComponents:
  # Vorverarbeitender Konstruktor
  def __init__(graph: UndirectedGraph) -> None

  # Sind Knoten node1 und node2 verbunden?
  def connected(node1: int, node2: int) -> bool

  # Anzahl der Zusammenhangskomponenten
  def count() -> int

  # Komponentenbezeichner für node
  # (zwischen 0 und count()-1)
  def id(node: int) -> int
```

Idee: Folge von Graphexplorationen bis alle Knoten besucht sind.
ID eines Knoten entspricht Iteration, in der er besucht wurde

Zusammenhangskomponenten: Algorithmus

```
class ConnectedComponents:
    def __init__(self, graph):
        self.id = [None] * graph.no_nodes()
        self.curr_id = 0
        visited = [False] * graph.no_nodes()
        for node in range(graph.no_nodes()):
            if not visited[node]:
                self.dfs(graph, node, visited)
                self.curr_id += 1

    def dfs(self, graph, node, visited):
        if visited[node]:
            return
        visited[node] = True
        self.id[node] = self.curr_id
        for n in graph.neighbours(node):
            self.dfs(graph, n, visited)
```

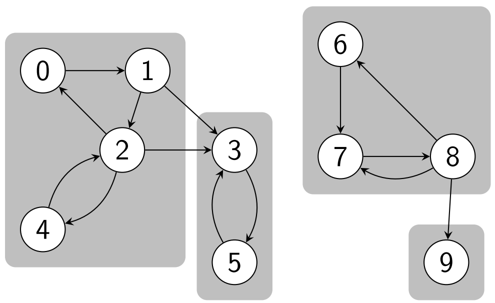
Wie sehen connected, count und id aus?

Zusammenhangskomponenten gerichteter Graphen

Gerichteter Graph G

- Ignoriert man die Richtung der Kanten, ist jede Zusammenhangskomponente des resultierenden ungerichteten Graphen eine schwache Zusammenhangskomponente von G.
- G ist stark zusammenhängend, wenn von jedem Knoten zu jedem anderen Knoten ein gerichteter Pfad existiert.
- Eine starke Zusammenhangskomponente von G ist ein maximal grosser Teilgraph, der stark zusammenhängend ist.

Starke Zusammenhangskomponenten



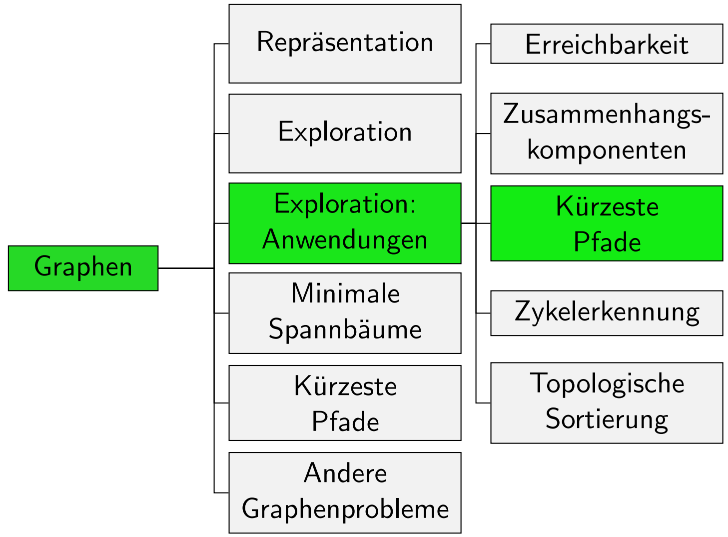
Starke Zusammenhangskomponenten

Kosaraju-Algorithmus

- Gegeben Graph $G = (V, E)$, berechne zunächst ein umgekehrte Postorderreihenfolge P (für alle Knoten) des Graphen $G^R = (V, \{(v, u) \mid (u, v) \in E\})$ (alle Kanten umgedreht).
- Führe eine Folge von Explorationen in G aus. Wähle dabei als nächsten Startknoten jeweils den ersten noch unbesuchten Knoten in P.
- Alle Knoten, die innerhalb einer Exploration erreicht werden, sind in der gleichen starken Zusammenhangskomponente.

C2.3 Kürzeste Pfade

Graphen: Übersicht



Kürzeste-Pfade-Problem

Kürzeste-Pfade-Problem mit einem Startknoten

- Gegeben: Graph und Startknoten s
- Anfrage für Knoten v
  - Gibt es Pfad von s nach v?
  - Wenn ja, was ist der kürzeste Pfad?
- Engl. single-source shortest paths, SSSP

Kürzeste Pfade: Idee

- Breitensuche besucht die Knoten mit aufsteigendem (minimalen) Abstand vom Startknoten.
- Erster Besuch eines Knoten passiert auf kürzestem Pfad.
- Idee: Verwende Pfad aus induzierten Suchbaum

Kürzeste Pfade: Algorithmus

```
class SingleSourceShortestPaths:
    def __init__(self, graph, start_node):
        self.graph = graph
        self.predecessor = [None] * graph.no_nodes()
        self.predecessor[start_node] = start_node

        # precompute predecessors with beadth-first search with
        # self.predecessors used for detecting visited nodes
        queue = deque()
        queue.append(start_node)
        while queue:
            v = queue.popleft()
            for s in graph.successors(v):
                if self.predecessor[s] is None:
                    self.predecessor[s] = v
                    queue.append(s)
    ...
```

Im Prinzip wie gehabt (nur als Klasse)

Kürzeste Pfade: Algorithmus (Fortsetzung)

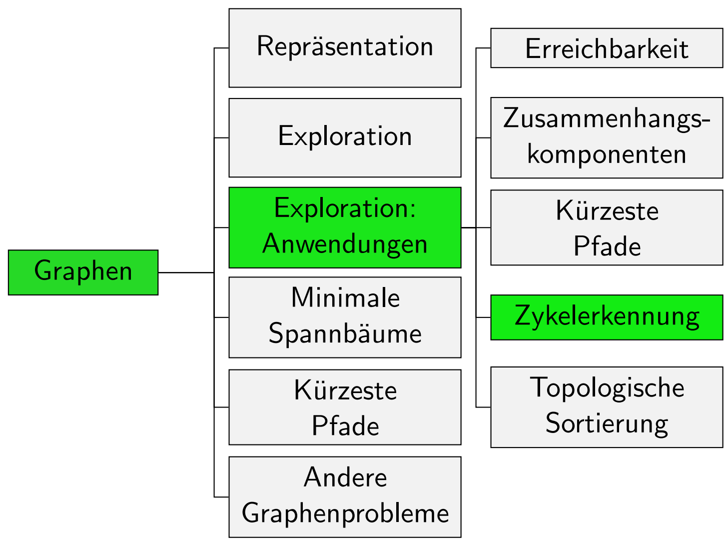
```
    def has_path_to(self, node):
        return self.predecessor[node] is not None

    def get_path_to(self, node):
        if not self.has_path_to(node):
            return None
        if self.predecessor[node] == node:  # start node
            return [node]
        pre = self.predecessor[node]
        path = self.get_path_to(pre)
        path.append(node)
        return path
```

Laufzeit?

Später: Kürzeste Pfade mit Kantengewichten

C2.4 Azyklische Graphen

Graphen: Übersicht



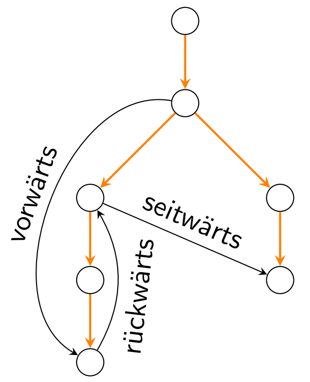
Erkennung von azyklischen Graphen

Definition (Gerichteter, azyklischer Graph)

Ein gerichteter, azyklischer Graph (directed acyclic graph, DAG) ist ein gerichteter Graph, der keine gerichteten Zyklen enthält.

Aufgabe: Entscheide, ob ein gerichteter Graph einen Zyklus enthält. Falls ja, gib einen Zyklus aus.

Kriterium für Zykelfreiheit



Induzierter Suchbaum einer Tiefensuche (orange) und mögliche andere Kanten

Der (erreichbare Teil-) Graph ist genau dann azyklisch, wenn keine Rückwärtskante existiert.

Idee: Merke dir Knoten auf aktuellem Pfad in Tiefensuche

Zykeltest: Algorithmus

```
class DirectedCycle:
    def __init__(self, graph):
        self.predecessor = [None] * graph.no_nodes()
        self.on_current_path = [False] * graph.no_nodes()
        self.cycle = None
        for node in range(graph.no_nodes()):
            if self.has_cycle():
                break
            if self.predecessor[node] is None:
                self.predecessor[node] = node
                self.dfs(graph, node)

    def has_cycle(self):
        return self.cycle is not None
```

Wiederholte Tiefensuchen, so dass am Ende alle Knoten besucht wurden

Zykeltest: Algorithmus (Fortsetzung)

```
    def dfs(self, graph, node):
        self.on_current_path[node] = True
        for s in graph.successors(node):
            if self.has_cycle():
                return
            if self.on_current_path[s]:
                self.predecessor[s] = node
                self.extract_cycle(s)
            if self.predecessor[s] is None:
                self.predecessor[s] = node
                self.dfs(graph, s)
        self.on_current_path[node] = False
```

Brich ab, wenn irgendwo Zyklus gefunden.

Zyklus gefunden

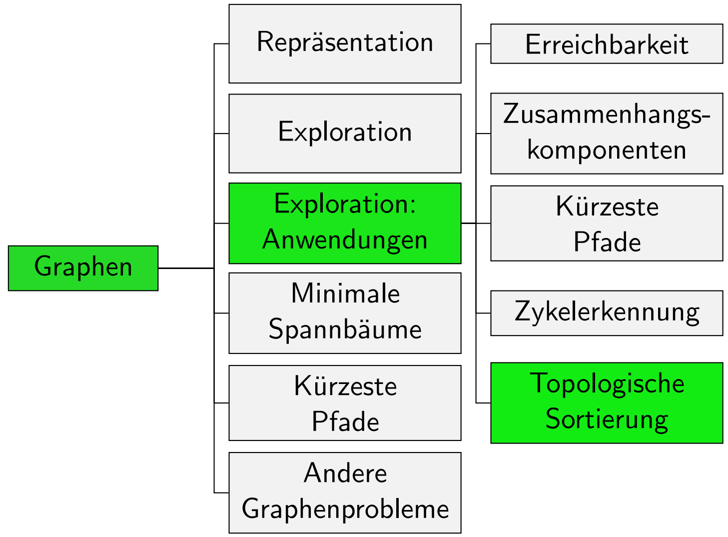
Aktualisiere, ob Knoten auf aktuellem Pfad ist.

Zykeltest: Algorithmus (Fortsetzung)

Bei Aufruf von `extract_cycle` liegt `node` auf einem Zyklus in `self.predecessor`.

```
def extract_cycle(self, node):
    self.cycle = deque()
    current = node
    self.cycle.appendleft(current)
    while True:
        current = self.predecessor[current]
        self.cycle.appendleft(current)
        if current == node:
            return
```


Graphen: Übersicht



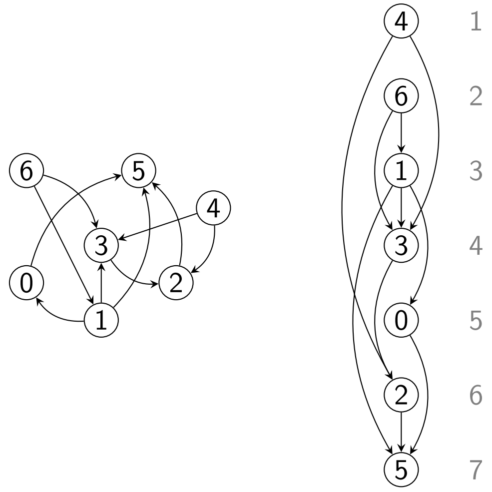
Topologische Sortierung

Definition

Eine topologische Sortierung eines azyklischen, gerichteten Graphen $G = (V, E)$, ist eine Nummerierung $no : V \to \mathbb{N}$ der Knoten, so dass für jede Kante (u, v) gilt, dass $no(u) < no(v)$.

Zum Beispiel relevant für Ablaufplanung:
Kante (u, v) drückt aus, dass u vor v „erledigt“ werden muss.

Topologische Sortierung: Illustration



Topologische Sortierung: Algorithmus

Theorem
Für den erreichbaren Teilgraphen eines azyklischenen Graphen ist die umgekehrte Depth-First-Postorder-Knotenreihenfolge eine topologische Sortierung.

Algorithmus:

- Folge von Tiefensuchen-Aufrufen (für bisher unbesuchte Knoten) bis alle Knoten besucht.
- Speichere jeweils umgekehrte Postorderreihenfolge P_i für i-te Suche
- Sei k Anzahl der Suchen. Dann ergibt die Aneinanderreihung von $P_k, \dots, P_1$ eine topologische Sortierung.

C2.5 Zusammenfassung

Zusammenfassung

Wir haben eine Reihe von Anwendungen der Graphenexploration betrachtet:

- Erreichbarkeit
- Zusammenhangskomponenten
- Kürzeste Pfade
- Zykelerkennung
- Topologische Sortierung