Algorithmen und Datenstrukturen

B7. Balancierte Bäume[1]

Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

10. April 2019

[1] Folien basieren auf Vorlesungsfolien von Sedgewick & Wayne
https://algs4.cs.princeton.edu/lectures/33BalancedSearchTrees-2x2.pdf

Einführung

Informatiker des Tages : Donald Knuth

Donald E. Knuth

- Autor: "The art of computer programming"
  - Autor des Textsatzsystems TEX
- Gewinner Turing Award (1974) und vieler anderer Preise
  - Arbeit an Analyse von Algorithmen
- Entwickelte erste Sprache für "Literate programming"

Knuth D. The art of computer programming 1: Fundamental algorithms 2: Seminumerical algorithms 3: Sorting and searching. MA: Addison-Wesley. 1968.

Balancierte Bäume

	Worst-case			Average-case		
Implementation	suchen	einfügen	löschen	suchen (hit)	einfügen	löschen
Verkettete Liste	N	N	N	N/2	N	N/2
Binäre suche	$\log_2(N)$	N	N	$\log_2(N)$	$N/2$	N
BST	N	N	N	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\sqrt{N}$
Ziel	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$

Frage

Können wir eine Implementation finden, bei der alle Operationen logarithmische Komplexität haben?

2-3 Bäume

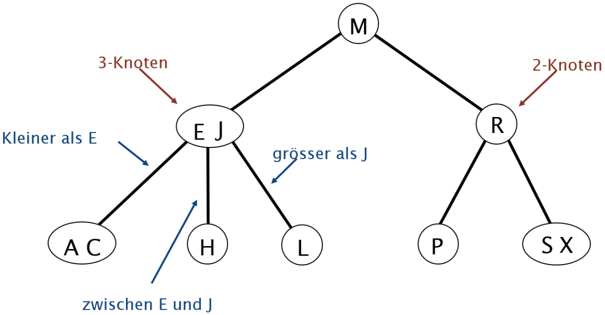
2-3 Bäume

Wir unterscheiden zwei Knotentypen

2-Knoten 1 Schlüssel, zwei Kinder

3-Knoten 2 Schlüssel, drei Kinder

- Wir verlangen symmetrische Ordnung
- Zusätzlich muss Baum perfekt balanciert sein.
  - Jeder Pfad von Wurzel zu Blatt hat dieselbe Länge.

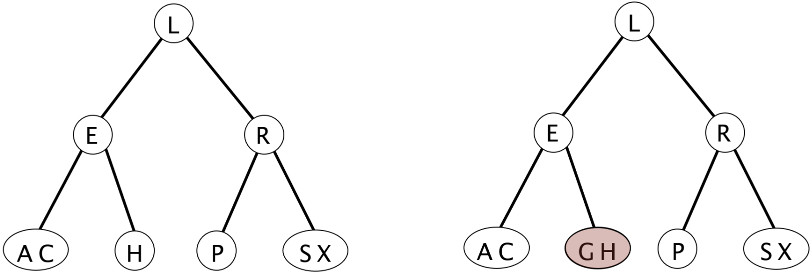


Einfügen in 2-3 Baum

Einfügen in 2-Knoten auf letzter Ebene

- Neuer Schlüssel zu 2-Knoten hinzufügen. Knoten wird zu 3-Knoten.

G Einfügen

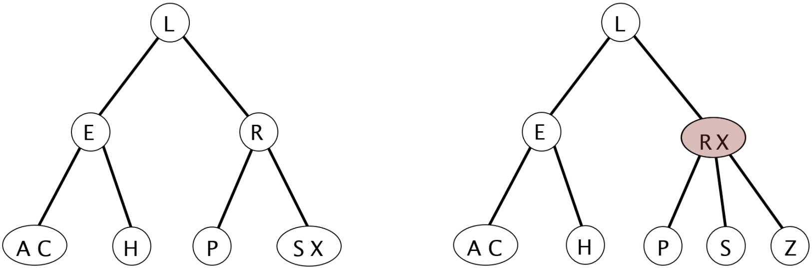


Einfügen in 2-3 Baum

Einfügen in 3-Knoten auf letzter Ebene

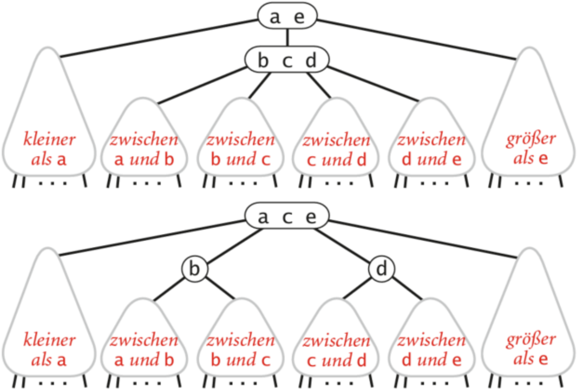
- Neuer Schlüssel zu 3-Knoten hinzufügen. Knoten wird temporär zu 4-Knoten.
- Mittlerer Knoten in Parent einfügen.
- Falls nötig, rekursiv fortsetzen.
- Falls Wurzel erreicht wird, und diese zu 4-Knoten wird, wird diese zu zwei 2-Knoten.

Z Einfügen



Lokale Transformationen

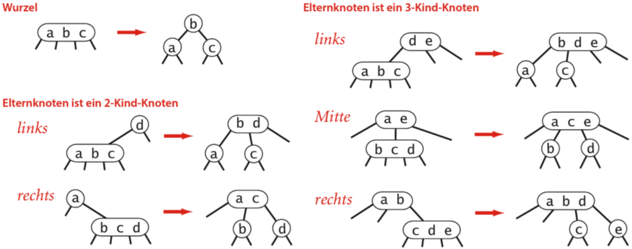
- Teilen eines 4 Knotens ist lokale Operation
  - Unterbäume nicht davon betroffen
  - Konstante Anzahl Operationen



Quelle: Abb. 3.30, Algorithmen, Wayne & Sedgewick

Globale Eigenschaften

- Invariante: Jede Operation belässt Baum perfekt balanciert.
- Ordnung der Teilbäume bleibt erhalten.



Quelle: Abb. 3.31, Algorithmen, Wayne & Sedgewick

2-3 Baum: Quiz: Performance

- Bäume sind perfekt balanciert!

Baumhöhe:

Worst Case

Best Case

Übersicht

	Worst-case			Average-case		
Implementation	suchen	einfügen	löschen	suchen (hit)	einfügen	löschen
Verkettete Liste	N	N	N	N/2	N	N/2
Binäre suche	$\log_2(N)$	N	N	$\log_2(N)$	$N/2$	N
Binärer Suchbaum	N	N	N	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\sqrt{N}$
2-3 Baum	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$

Problem

2-3 Bäume sind mühsam zu implementieren.

- Wir müssen viele Spezialfälle unterscheiden.
- Code wird unelegant und fehleranfällig.

- Elegante Lösung: Rot-Schwarz Bäume

Rot-Schwarz Bäume

Informatiker des Tages : Robert Sedgewick

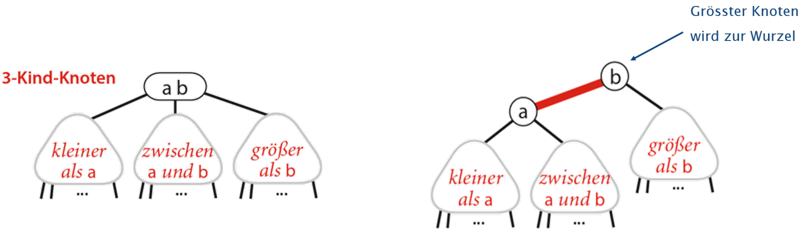
Robert Sedgewick

- Professor in Princeton
- Doktorand von Donald Knuth.
- "Erfinder" der Rot-Schwarz Bäume
- Autor von unserem Lehrbuch.

Guibas, Leo J., and Robert Sedgewick. "A dichromatic framework for balanced trees", IEEE Foundations of Computer Science, 1978.

Rot-Schwarz Bäume: Idee

- 2-3 Baum wird als binärer Suchbaum repräsentiert
- 3-Knoten werden mit speziellen "roten" links markiert.



Quelle: Abb. 3.34, Algorithmen, Wayne & Sedgewick

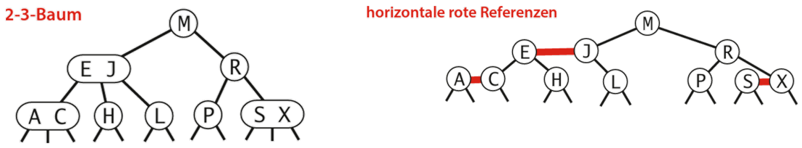
Rot-Schwarz Bäume: Idee

- 2-3 Baum wird als binärer Suchbaum repräsentiert
- 3-Knoten werden mit speziellen "roten" links markiert.

Quelle: Abb. 3.36, Algorithmen, Wayne & Sedgewick

Rot-Schwarz Bäume: Idee

- 2-3 Baum wird als binärer Suchbaum repräsentiert
- 3-Knoten werden mit speziellen "roten" links markiert.



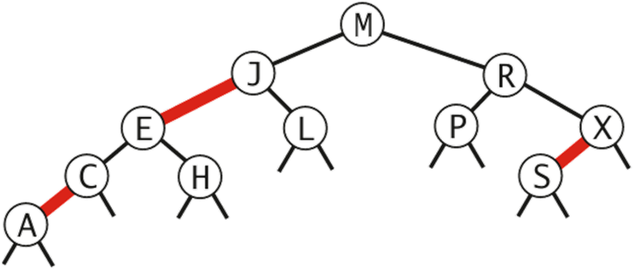
Quelle: Abb. 3.36, Algorithmen, Wayne & Sedgewick

Rot-Schwarz Bäume - Definition

Ein Rot-Schwarz Baum ist ein binärer Suchbaum, mit der Eigenschaft:

- Rote Referenzen zeigen nach links
- Von keinem Knoten gehen zwei rote Referenzen aus

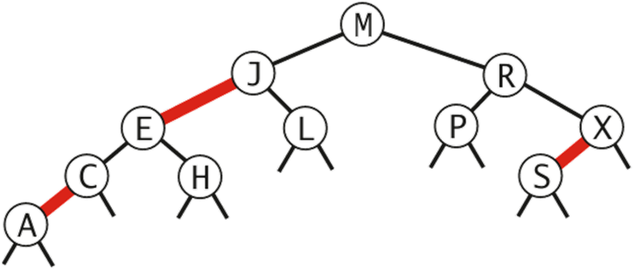
- Jeder Pfad von der Wurzel zu einem Blatt hat die gleiche Anzahl von schwarzen Referenzen.



Rot-Schwarz Bäume - Definition

Ein Rot-Schwarz Baum ist ein binärer Suchbaum, mit der Eigenschaft:

- Rote Referenzen zeigen nach links
- Von keinem Knoten gehen zwei rote Referenzen aus
  - (Keine 4-Knoten im 2-3 Baum)
- Jeder Pfad von der Wurzel zu einem Blatt hat die gleiche Anzahl von schwarzen Referenzen.
  - (Gleiche Tiefe im 2-3 Baum)

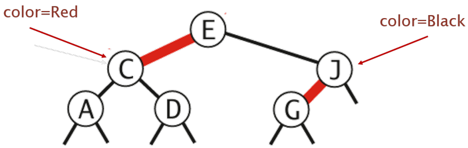


Repräsentation in Code

- Jeder Knoten hat genau eine Referenz von Parent
  - 1 Feld in Knoten genügt um Farbe speichern

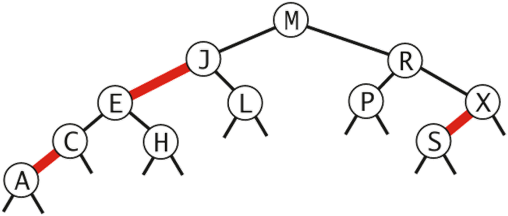
```
class Node[Key, Value]:
    Node(key : Key, value : Value)

    key : Key
    value : Value
    left : Node[Key, Value]
    right : Node[Key, Value]
    color : Color # Red or Black
```



Suchen und ordnungsbasierte Operationen

- RB-Tree ist ein binärer Suchbaum - einfach mit Farbe
- Implementation von Suche und ordnungsbasierten Operationen bleibt gleich.
  - Farbe wird ignoriert.



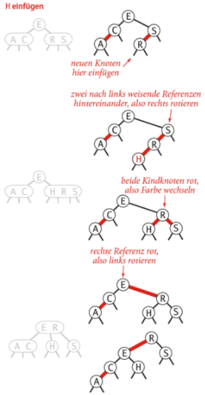
Quelle: Abb. 3.36, Algorithmen, Wayne & Sedgewick

Einfügen: Idee

Grundidee

Alle Operationen werden auf Operationen in entsprechendem 2-3 Baum zurückgeführt

- Neuer Link wird immer Rot
  - Führt zu potentiellem 4 Knoten in 2-3 Baum
- Lokale Operationen um 2-3 Baum wiederherzustellen
  - Farb wechseln
  - Rotation links
  - Rotation rechts



Einfügen: Details

- Unterscheidung aller möglichen Fälle
- Pro Fall: Eigene Strategie um 2-3 Baum wiederherzustellen

Am besten in Ruhe selber lesen / anschauen

- Relevante Teile aus dem Buch auf Adam
  - Gute, schrittweise Erklärung mit Ablaufprotokoll
- Details nicht prüfungsrelevant

Animation:
`https://algs4.cs.princeton.edu/lectures/33DemoRedBlackBST.mov`

Einfügen: Implementation

- Trügerisch einfache Implementation

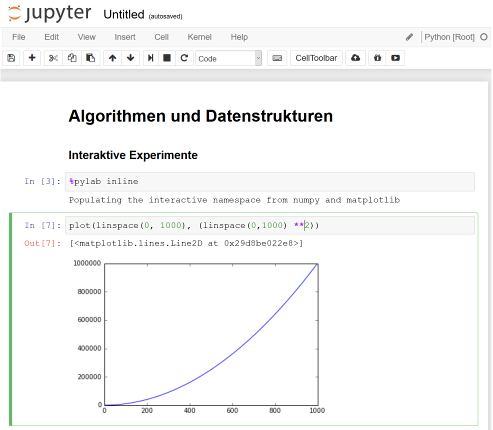
```
def _put(self, key, value, node):
  if (node == None):
    return RedBlackBST.Node(key, value, Color.RED, 1)
  elif key < node.key:
    node.left = self._put(key, value, node.left)
  elif key > node.key:
    node.right = self._put(key, value, node.right)
  elif key == node.key:
    node.value = value

  if self._isRed(node.right) and not self._isRed(node.left):
    node = self._rotateLeft(node)
  if self._isRed(node.left) and self._isRed(node.left.left):
    node = self._rotateRight(node)
  if self._isRed(node.left) and self._isRed(node.right):
    self._flipColors(node)

  node.count = 1 + self._size(node.left) + self._size(node.right)

  return node
```

Implementation



Jupyter-Notebook: `RedBlackBST.ipynb`

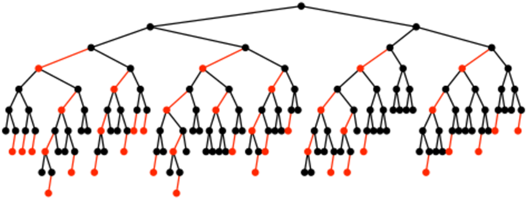
Analyse

Theorem

Die Höhe eines Rot-Schwarz-Baums mit N Knoten ist nicht höher als $2\log_2(N)$ *.*

Intuition:

- Jeder Pfad von Wurzel zu Blatt hat gleiche Anzahl von Schwarzen Referenzen
  - Korrespondenz mit 2-3 Baum
- Es gibt nie zwei rote Referenzen hintereinander.



Übersicht

	Worst-case			Average-case		
Implementation	suchen	einfügen	löschen	suchen (hit)	einfügen	löschen
Verkettete Liste	N	N	N	N/2	N	N/2
Binäre suche	$\log_2(N)$	N	N	$\log_2(N)$	$N/2$	N
Binärer Suchbaum	N	N	N	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\sqrt{N}$
Rot-Schwarz Baum	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$	$\log_2(N)$

Wir haben logarithmische Komplexität aller Operationen mit einer kleinen Konstante.