Algorithmen und Datenstrukturen

B4. Intermezzo - Bäume

Marcel Lüthi and Gabriele Röger

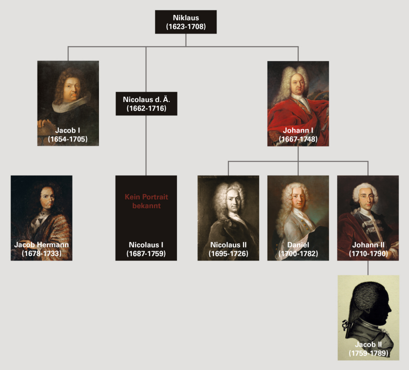
Universität Basel

28. März 2019

Definitionen und Eigenschaften

Was ist ein Baum

- Struktur um Daten hierarchisch anzuordnen.



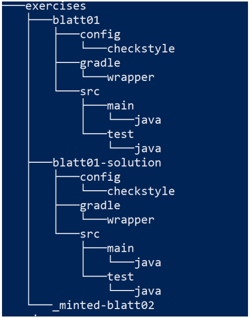


Abbildung: http://www.ub.unibas.ch/bernoulli/index.php/Stammbaum

Was ist ein Baum

Rekursive Definition

Ein Baum T der Ordnung n ist

- der leere Baum,
- oder besteht aus einem Knoten (der Wurzel) sowie maximal n Bäumen (den Unterbäumen von T).

Was ist ein Baum

Rekursive Definition

Ein Baum T der Ordnung n ist

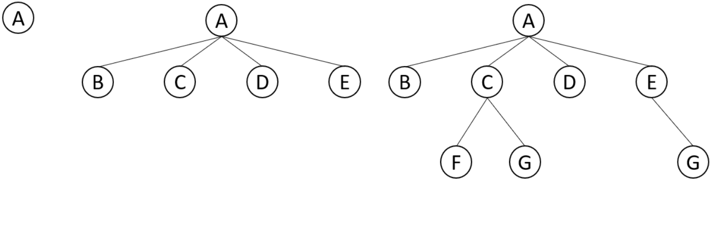
- der leere Baum,
- oder besteht aus einem Knoten (der Wurzel) sowie maximal n Bäumen (den Unterbäumen von T).

Vergleiche mit Definition von Liste:

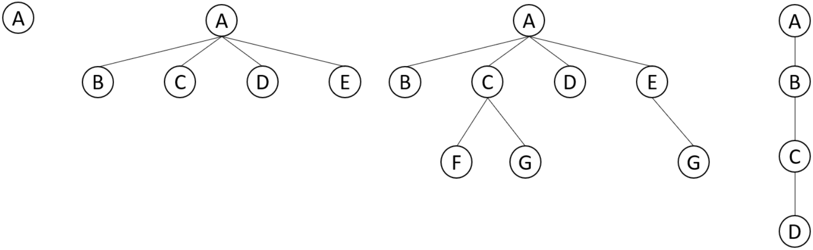
Eine Liste L ist

- die leere Liste
- oder ein Element H (Head) gefolgt von einer Liste.

Beispiele

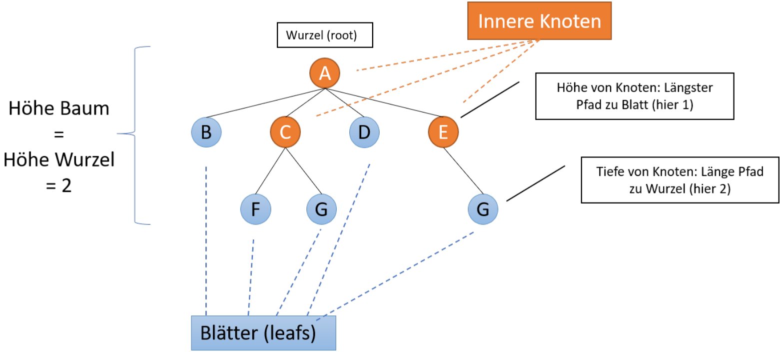


Beispiele



Eine Liste ist ein Spezialfall eines Baumes (Baum der Ordnung 1)

Terminologie



Wichtigster Spezialfall: Binärbaum

Binärbaum (Binary Tree)

Ein Binärbaum T ist

- der leere Baum
- oder besteht aus einem Knoten (genannt Wurzel) sowie maximal 2 Bäumen (den Unterbäumen von T).

- Binärbäume haben jede Menge Anwendungen
- Unser aktueller Fokus

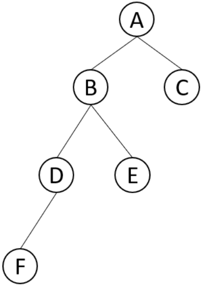
Wichtigster Spezialfall: Binärbaum

Binärbaum (Binary Tree)

Ein Binärbaum T ist

- der leere Baum
- oder besteht aus einem Knoten (genannt Wurzel) sowie maximal 2 Bäumen (den Unterbäumen von T).

- Binärbäume haben jede Menge Anwendungen
- Unser aktueller Fokus

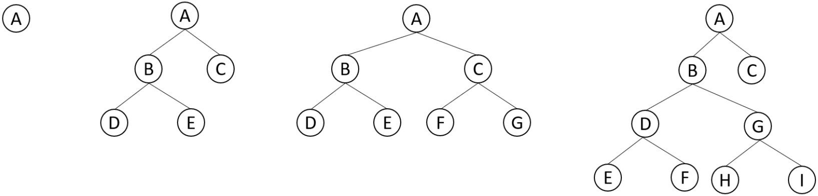


Terminologie (2)

- Voller Binärbaum: Jeder Knoten hat 0 oder 2 Kinder
- Vollständiger (oder kompletter) Binärbaum: Alle Ebenen sind vollständig gefüllt ausser evtl. die letzte Ebene wobei nur Blätter rechts fehlen dürfen.
- Perfekter Binärbaum: Alle internen Knoten haben genau 2 Kinder und alle Blätter sind auf der gleichen Ebene

Quiz

- Welche der folgenden Bäume sind voll, vollständig oder perfekt?
- Wie ist es mit dem leeren Baum?



Höhe eines perfekten Binärbaums

Theorem

Die Höhe eines perfekten Binärbaums der Grösse N (also mit N Knoten) ist $\log_2(N+1)-1$.

Beweis.

- Die Anzahl Knoten N eines perfekten Baumes der Höhe h sind $N = 2^0 + 2^1 + \ldots, +2^h = 2^{h+1} - 1$
- Auflösen nach h ergibt $\log_2(N+1) = h + 1 \Leftrightarrow h = \log_2(N+1) - 1$

$\square$

Höhe eines vollständigen Binärbaums

Theorem

Die Höhe eines vollständigen Binärbaums der Grösse N is $\lfloor \log_2(N) \rfloor$

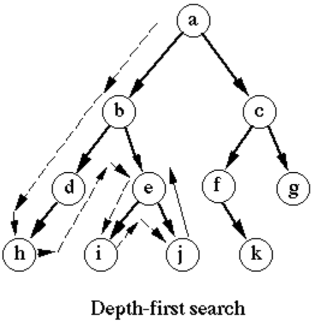
- Es stimmt für Höhe 0 (Für $N = 1$ ist $\log_2(1) = 0$)
- Die Höhe nimmt nur um 1 zu, wenn N so vergrössert wird, dass es eine Zweierpotenz wird.
  - D.h ein Knoten ist alleine auf der letzten Ebene.

Traversierung

Traversierung

Breitenansatz (breadth-first-search). Eine Ebene nach dem anderen.

Tiefenansatz (depth-first-search). Zuerst in die Tiefe, dann links nach rechts.



Quelle:http://www.cse.unsw.edu.au/ billw/Justsearch.html

Depth-first-search Traversierung

Wir unterscheiden drei Hauptarten der DFS Traversierung:

Preorder Aktueller Knoten zuerst, danach weiter traversieren

Inorder Aktueller Knoten zwischen Traversierung von Unterbäumen

Postorder Aktueller Knoten nach Traversierung von Unterbäumen

Datenstruktur

Datenstruktur für Binärbaum

```
class Node[Item]:
    item  : Item
    left: Node[Item]
    right: Node[Item]

    # Konstruktor
    NodeTree(item : Item, left : Node[Item], right: Node[Item])
```

Datenstruktur für Binärbaum

```
class Node[Item]:
    item   : Item
    left:  Node[Item]
    right: Node[Item]

    # Konstruktor
    NodeTree(item : Item, left : Node[Item], right: Node[Item])
```

Vergleiche mit verketteter Liste:

```
class Node[Item]:
  item : Item
  next : Node
  Node(head : Item, next : Node[Item])   # Konstruktor
```

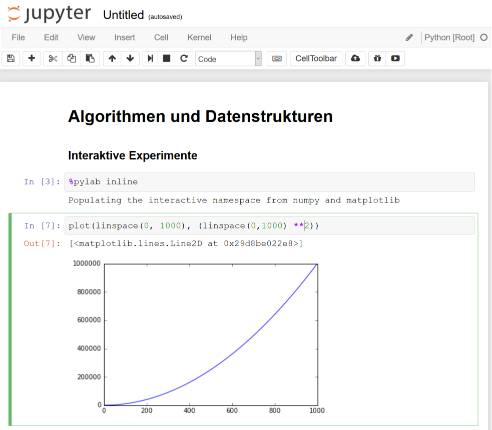
Rekursive Interpretation

```
class BinaryTree[Item]:
    item   Item
    left: BinaryTree[Item]
    right: BinaryTree[Item]

    BinaryTree(item : Item,
               left : BinaryTree[Item],
               right: BinaryTree[Item]
               )
```

- Nichts Neues: Nur neue Interpretation der Knoten (als Baum)
- Nützlich in Implementation

Implementation



IPython Notebooks: Trees.ipynb