

# Algorithmen und Datenstrukturen

## A4. Sortieren II: Mergesort

Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

21. Februar 2019

# Algorithmen und Datenstrukturen

21. Februar 2019 — A4. Sortieren II: Mergesort

A4.1 Mergesort

A4.2 Merge-Schritt

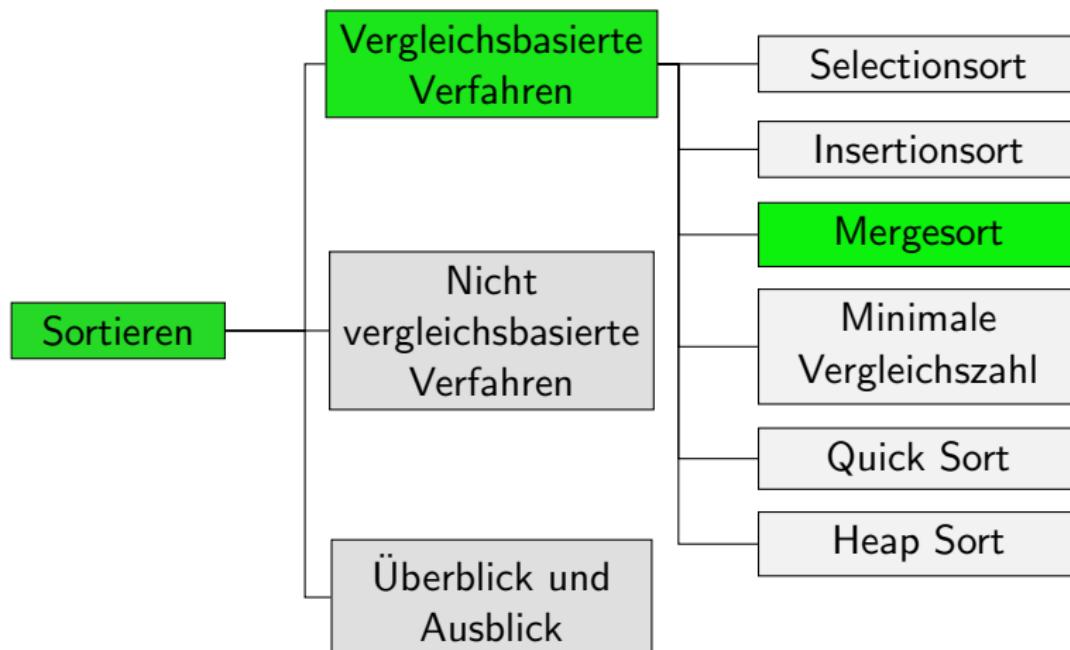
A4.3 Top-Down-Mergesort

A4.4 Bottom-Up-Mergesort

A4.5 Zusammenfassung

## A4.1 Mergesort

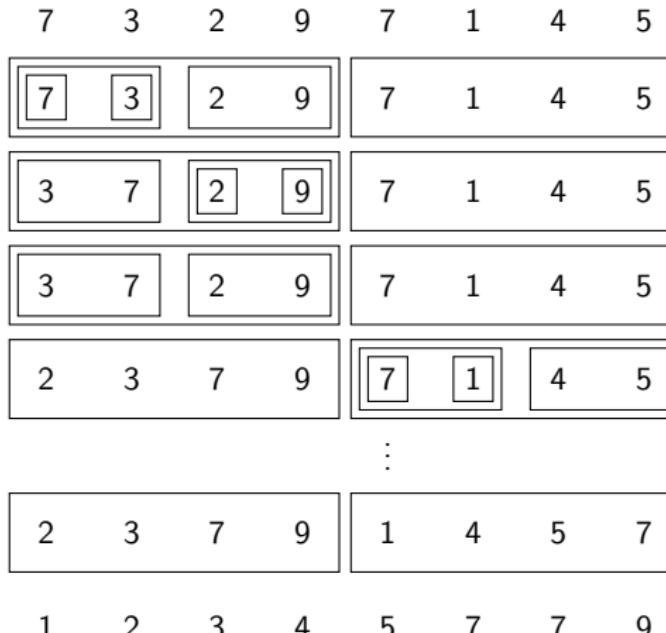
# Sortierverfahren



## Mergesort: Idee

- ▶ **Beobachtung:** zwei bereits sortierte Sequenzen lassen sich leicht zu einer sortierten Sequenz vereinen.
- ▶ Sequenzen mit einem oder keinem Element sind sortiert.
- ▶ **Idee** für längere Sequenzen:
  - ▶ Teile Eingabesequenz in zwei etwa gleich grosse Teilbereiche
  - ▶ Rekursiver Aufruf für beide Teilmengen
  - ▶ Füge nun sortierte Teilbereiche zusammen.
- ▶ **Teile-und-Herrsche-Ansatz** (divide and conquer)

# Mergesort: Illustration



(Detaillierte Animation in Bildschirm-Version der Folien)

## A4.2 Merge-Schritt

# Verbinden der Teillösungen

- ▶ Indizes  $lo \leq mid < hi$
- ▶ Annahme:  $\text{array}[lo]$  bis  $\text{array}[mid]$  und  $\text{array}[mid+1]$  bis  $\text{array}[hi]$  sind bereits sortiert
- ▶ Ziel:  $\text{array}[lo]$  bis  $\text{array}[hi]$  ist sortiert
- ▶ Idee: gehe parallel von vorne nach hinten durch beide Teilbereiche und sammle das jeweils kleinere Element auf
- ▶ Verwendet zusätzlichen Speicher für aufgesammelte Werte

# Verbinden der Teillösungen: Beispiel

Array tmp hat gleiche Grösse wie Eingabearray.

Initialisierung:  $i := \text{lo}$ ,  $j := \text{mid} + 1$ ,  $k := \text{lo}$

| $\text{lo}, i$ | $a$ |   |     |   | $\text{mid}$ | $j$ | $\text{hi}$ | $\text{tmp}$ |   |   |   |   | $k$ |     |
|----------------|-----|---|-----|---|--------------|-----|-------------|--------------|---|---|---|---|-----|-----|
| ...            | 2   | 4 | 5   | 4 | 7            | ... | ...         |              |   |   |   |   |     | ... |
|                | lo  | i | mid | j | hi           |     |             |              |   |   |   |   |     |     |
| ...            | 2   | 4 | 5   | 4 | 7            | ... | ...         | 2            |   |   |   |   |     | ... |
|                | lo  |   | mid | i | j            | hi  |             |              |   |   |   |   |     |     |
| ...            | 2   | 4 | 5   | 4 | 7            | ... | ...         | 2            | 4 |   |   |   |     | ... |
|                | lo  |   | mid | i | hi,j         |     |             |              |   |   |   |   |     |     |
| ...            | 2   | 4 | 5   | 4 | 7            | ... | ...         | 2            | 4 | 4 |   |   |     | ... |
|                | lo  |   | mid | i | hi,j         |     |             |              |   |   |   |   |     |     |
| ...            | 2   | 4 | 5   | 4 | 7            | ... | ...         | 2            | 4 | 4 | 5 |   |     | ... |
|                | lo  |   | mid | i | hi           |     |             |              |   |   |   |   |     |     |
| ...            | 2   | 4 | 5   | 4 | 7            | ... | ...         | 2            | 4 | 4 | 5 | 7 |     | ... |

$$a[i] \leq a[j] \Rightarrow \text{tmp}[k] = a[i]$$

$$a[i] \leq a[j] \Rightarrow \text{tmp}[k] = a[i]$$

$$a[j] < a[i] \Rightarrow \text{tmp}[k] = a[j]$$

$$a[i] \leq a[j] \Rightarrow \text{tmp}[k] = a[i]$$

$$i > \text{mid} \Rightarrow \text{tmp}[k] = a[j]$$

# Verbinden der Teillösungen: Algorithmus

---

```
1 def merge(array, tmp, lo, mid, hi):
2     i = lo
3     j = mid + 1
4     for k in range(lo, hi + 1): # k = lo,...,hi
5         if j > hi or (i <= mid and array[i] <= array[j]):
6             tmp[k] = array[i]
7             i += 1
8         else:
9             tmp[k] = array[j]
10            j += 1
11    for k in range(lo, hi + 1): # k = lo,...,hi
12        array[k] = tmp[k]
```

---

Auch korrekt für  $lo = mid = hi$

# Jupyter-Notebook



Jupyter-Notebook: `merge_sort.ipynb`

## A4.3 Top-Down-Mergesort

# Mergesort: Algorithmus

## rekursive Top-Down-Version

---

```
1 def sort(array):
2     tmp = [0] * len(array) # [0,...,0] with same size as array
3     sort_aux(array, tmp, 0, len(array) - 1)
4
5 def sort_aux(array, tmp, lo, hi):
6     if hi <= lo:
7         return
8     mid = lo + (hi - lo) // 2
9     # //: Division mit Abrunden
10    sort_aux(array, tmp, lo, mid)
11    sort_aux(array, tmp, mid + 1, hi)
12    merge(array, tmp, lo, mid, hi)
```

---

## Mögliche Verbesserungen

- ▶ Auf kurzen Sequenzen ist Insertionsort schneller als Mergesort  
→ verwende Insertionsort wenn `hi - lo` klein
- ▶ Breche Merge-Schritt direkt ab, falls Positionen `lo` bis `hi` bereits vollständig sortiert

```
if array[mid] <= array[mid + 1]:  
    return
```

- ▶ Kopieren von `tmp`-Ergebnis in `merge` kostet Zeit  
→ tausche Rolle von `array` und `tmp`  
bei jedem rekursiven Aufruf

## Merge-Schritt: Korrektheit

- ▶ **Invariante:** Am Ende jeder Schleifeniteration ist
  - ▶  $\text{tmp}[k] \leq \text{array}[m]$  für alle  $i \leq m \leq \text{mid}$ , und
  - ▶  $\text{tmp}[k] \leq \text{array}[n]$  für alle  $j \leq n \leq \text{hi}$ .
- ▶  $\text{tmp}$  wird von vorne nach hinten beschrieben.
- ▶ Nach letzter Schleifeniteration gilt für alle  $\text{lo} \leq r < s \leq \text{hi}$ , dass  $\text{tmp}[r] \leq \text{tmp}[s]$  (= Bereich ist sortiert).

# Mergesort: Korrektheit

`sort_aux:`

- ▶ Induktionsbeweis über Bereichslänge  $hi - lo$
- ▶ Basis  $hi - lo = -1$ : leerer Bereich ist sortiert.
- ▶ Basis  $hi - lo = 0$ : Bereich mit nur einem Element ist sortiert.
- ▶ Induktionshypothese: Mergesort ist korrekt für alle  $hi - lo < m$
- ▶ Induktionsschritt ( $m - 1 \rightarrow m$ ):

Mergesort macht zwei rekursive Aufrufe mit

$hi - lo \leq m/2 + 1$ , danach ist die Eingabe jeweils zwischen  $lo$  und  $mid$  und zwischen  $mid + 1$  und  $hi$  sortiert (lt. Ind.-hyp).

Wir wissen bereits, dass der Merge-Schritt korrekt ist, also ist am Ende der gesamte Bereich zwischen  $lo$  und  $hi$  sortiert.

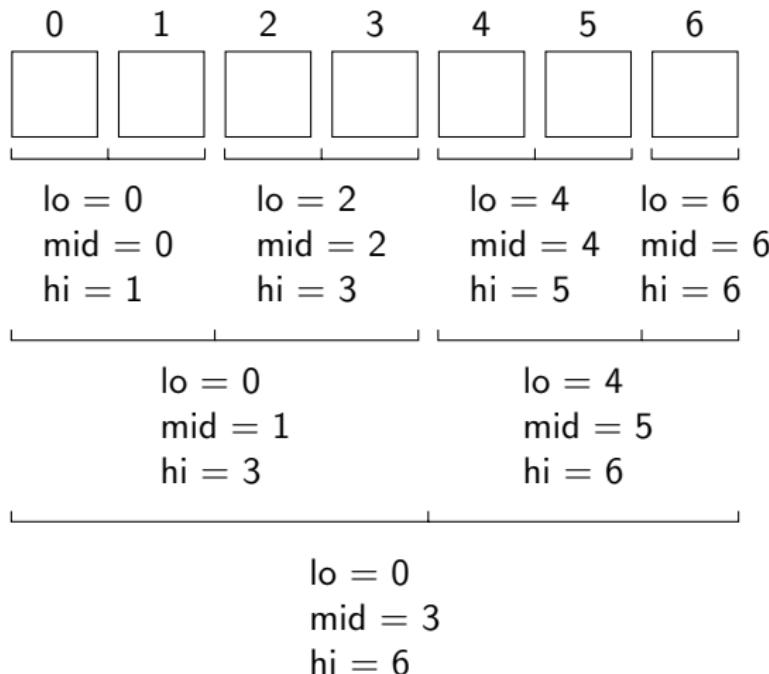
**Mergesort:** Ruft `sort_aux` für gesamten Bereich auf,  
daher ist am Ende die gesamte Eingabe sortiert.

## Mergesort: Eigenschaften

- ▶ **nicht in-place:** verwendet zusätzlichen Speicherplatz für `tmp` und für Aufrufstapel (call stack)
- ▶ **Zeitbedarf:** nicht adaptiv (ausser mit Mergeabbruch-Verbesserung)  
genauere Analyse: nächste Woche
- ▶ **stabil:** `merge` präferiert `array[i]`, wenn `array[i]` gleich `array[j]`.

## A4.4 Bottom-Up-Mergesort

## Bottom-Up-Version



# Bottom-Up-Mergesort: Algorithm

## iterative Bottom-Up-Version

---

```
1 def sort(array):
2     n = len(array)
3     tmp = [0] * n
4     length = 1
5     while length < n:
6         lo = 0
7         while lo < n - length:
8             mid = lo + length - 1
9             hi = min(lo + 2 * length - 1, n - 1)
10            merge(array, tmp, lo, mid, hi)
11            lo += 2 * length
12            length *= 2
```

---

## A4.5 Zusammenfassung

# Zusammenfassung

- ▶ Mergesort ist ein **Teile-und-Herrsche-Verfahren**, das den zu sortierenden Bereich in zwei etwa gleich grosse Bereiche teilt.
- ▶ Der **Merge-Schritt** führt zwei bereits sortierte Teilbereiche zusammen.
- ▶ Mergesort ist **stabil**, arbeitet aber **nicht in-place**.
- ▶ Die **Top-Down-Variante** ist ein **rekursives Verfahren**.
- ▶ Die **Bottom-Up-Variante** ist ein **iteratives Verfahren**.