Algorithmen und Datenstrukturen

A3. Sortieren I: Selection- und Insertionsort

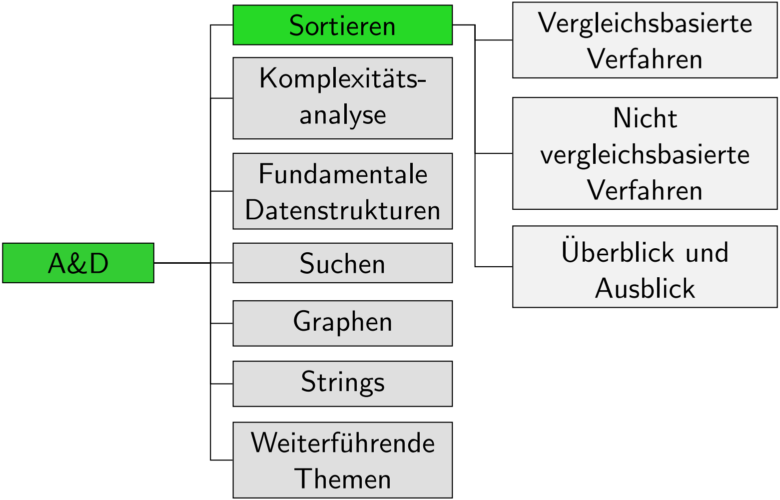
Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

21. Februar 2019

A3.1 Sortieralgorithmen

Inhalt dieser Veranstaltung



Relevanz

Sortieren von Daten wichtig für viele Anwendungen, z.B.

- sortierte Darstellung (z.B. auf Webseite)
  - Produkte sortiert nach Preis, Kundenbewertung, etc.
  - Kontobewegungen sortiert nach Buchungsdatum
- Vorverarbeitung für viele effiziente Suchalgorithmen
  - Wie schnell können Sie eine Nummer im Telefonbuch nachschlagen? Und wenn die Einträge nicht sortiert wären?
- Vorverarbeitung für viele andere Verfahren
  - z.B. Kruskals Algorithmus zur Berechnung minimaler Spannbäume von ungerichteten Graphen

Fachzeitschrift „Computing in Science & Engineering“ nennt Quicksort-Sortieralgorithmus als einen der 10 wichtigsten Algorithmen des 20. Jahrhunderts.

Aufgabenstellung

Aufgabenstellung Sortieralgorithmen

Eingabe

- Sequenz von n Elementen $e_1, \dots, e_n$
- Jedes Element e_i hat Schlüssel $k_i = key(e_i)$
- Ordnungsrelation $\leq$ auf den Schlüsseln
  reflexiv: $k \leq k$
  transitiv: $k \leq k'$ und $k' \leq k'' \Rightarrow k \leq k''$
  antisymmetrisch: $k \leq k'$ und $k' \leq k \Rightarrow k = k'$

Resultat

- Sequenz der Eingabeelemente gemäss Ordungsrelation ihrer Schlüssel sortiert

Notation: auch $e \leq e'$ für $key(e) \leq key(e')$

Aufgabenstellung: Beispiele

Example

Eingabe: $\langle 3, 6, 2, 3, 1 \rangle$, $\mathit{key}(e) = e$, $\leq$ auf natürlichen Zahlen
Ausgabe: $\langle 1, 2, 3, 3, 6 \rangle$

Example

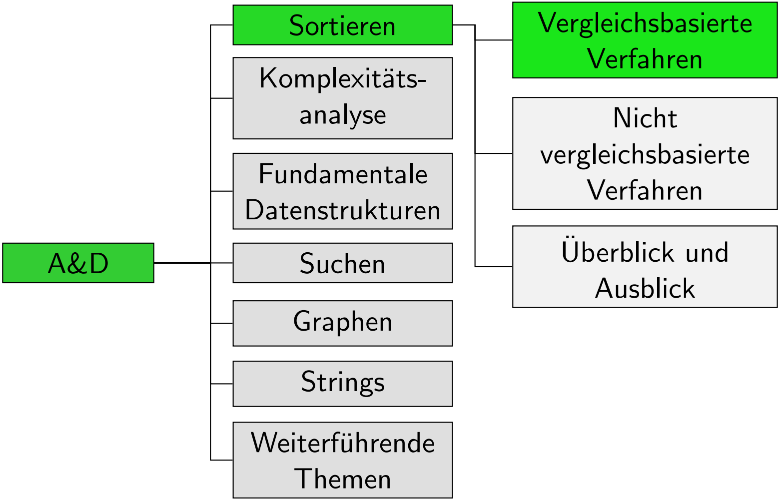
Eingabe: Liste aller Studierenden der Uni Basel,
$\mathit{key}(e) = \langle \text{Wohnort von } e \rangle$, lexikographische Ordnung
Ausgabe: Liste aller Studierenden, nach Wohnort sortiert

Bis auf weiteres: ganze Zahlen, $\mathit{key}(e) = e$ und „kleiner gleich"
Später (und Übung): Umgang mit komplexen Objekten

Interessante Eigenschaften von Sortieralgorithmen

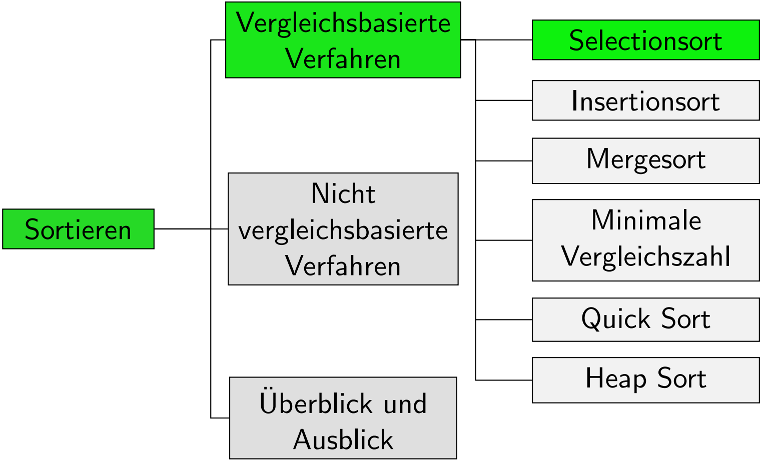
- Zeitbedarf: Wieviele Schlüsselvergleiche und Swaps werden durchgeführt?
  adaptiv: Verfahren ist schneller, wenn Eingabe bereits (teilweise) vorsortiert.
- Platzbedarf: Wieviel Speicherplatz wird zusätzlich zum Eingabearray verwendet (explizit oder im call stack)?
  in-place: Zusätzlich verbrauchter Platz ist konstant (nicht abhängig von der Eingabegrösse).
- stabil: Reihenfolge von Elementen mit gleichem Schlüssel wird nicht verändert.
- vergleichsbasiert: Verfahren verwendet nur Vergleich von Schlüsselpaaren und Tausch zweier Elemente.

Inhalt dieser Veranstaltung

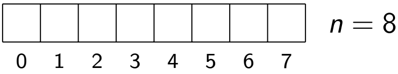


A3.2 Selectionsort

Sortierverfahren



Selectionsort: Informell



- Finde kleinstes Element an Positionen $0, \ldots, n-1$ und tausche es an Position 0
- Finde kleinstes Element an Positionen $1, \ldots, n-1$ und tausche es an Position 1
- ...
- Finde kleinstes Element an Positionen $n-2, \ldots, n-1$ und tausche es an Position n - 2

Selectionsort: Algorithmus

```
def selection_sort(array):
    n = len(array)
    for i in range(n - 1):  # i = 0, ..., n-2
        # find index of minimum element at positions i, ..., n-1
        min_index = i
        for j in range(i + 1, n):  # j = i+1, ..., n-1
            if array[j] < array[min_index]:
                min_index = j
        # swap element at position i with minimum element
        array[i], array[min_index] = array[min_index], array[i]
```

Selectionsort: Beispiel

i	min_ind.	0	1	2	3	4	5	6	7
		3	7	2	9	7	1	4	5
0	5	3	7	2	9	7	1	4	5
1	2	1	7	2	9	7	3	4	5
2	5	1	2	7	9	7	3	4	5
3	6	1	2	3	9	7	7	4	5
4	7	1	2	3	4	7	7	9	5
5	5	1	2	3	4	5	7	9	7
6	7	1	2	3	4	5	7	9	7
		1	2	3	4	5	7	7	9

Minimum wird in dunklen Einträgen gesucht.

Roter Eintrag ist gefundenes Minimum.

Graue Einträge sind in richtiger Reihenfolge.

Selectionsort: Korrektheit

- Invariante: Eigenschaft, die während der gesamten Algorithmenlaufzeit gilt.
- Invariante 1: Zum Ende jedes Durchlaufs der äusseren Schleife sind die Elemente an den Positionen $\leq i$ sortiert.
- Invariante 2: Zum Ende jedes Durchlaufs der äusseren Schleife ist keines der Elemente an den Positionen $\leq i$ grösser als ein Element an einer Position $> i$.
- Korrektheit der Invarianten per (gemeinsamer) Induktion
- Nach letztem Schleifendurchlauf sind alle Elemente bis auf das letzte in korrekter Reihenfolge und das letzte ist nicht kleiner als das vorletzte.
  $\rightarrow$ gesamte Eingabe sortiert

Selectionsort: Eigenschaften

- in-place: zusätzlicher Speicherbedarf nicht abhängig von Eingabegrösse
- Zeitbedarf: hängt nur von Grösse der Eingabe ab
  (nicht adaptiv für teilsortierte Eingaben)
  genauere Analyse: nächste Woche
- nicht stabil: beim Tausch kann das Element an Position i hinter ein gleiches Element springen, was später nicht mehr "repariert" wird.

Jupyter-Notebook

jupyter selection_sort

Logout

File Edit View Insert Cell Kernel Widgets Help Trusted Python 3

Selection Sort

Hier ist nochmal der Selection-Sort-Algorithmus aus der Vorlesung:

In [1]:

```python
def selection_sort(array):
    n = len(array)
    for i in range(n - 1):
        # print(array)
        min_index = i
        for j in range(i + 1, n):
            if array[j] <= array[min_index]:
                min_index = j
        # print("Kleinstes Element an Pos.", i, "-", len(array) - 1,
        #      "ist", array[min_index])
        # print("Tausche es mit", array[i], "an Pos.", i)
        array[i], array[min_index] = array[min_index], array[i]
```

Hier ein Beispielaufruf:

In [2]:

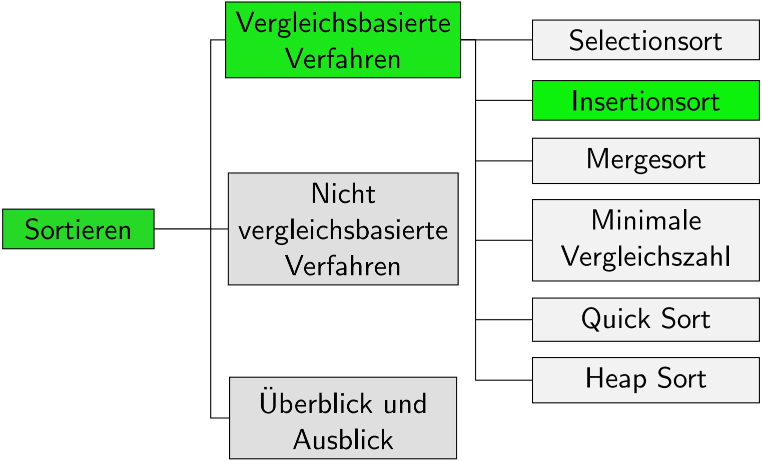
```python
test_array = [7,3,5,9,3]
selection_sort(test_array)
print(test_array)
```

```
[3, 3, 5, 7, 9]
```

Jupyter-Notebook: `selection_sort.ipynb`

A3.3 Insertionsort

Sortierverfahren



Insertionsort: Informell

- Ähnlich zum Sortieren von Spielkarten auf der Hand
- Elemente werden nacheinander in bereits sortierten Bereich am Sequenzanfang einsortiert.
- Grössere Elemente werden entsprechend nach hinten verschoben.

Insertionsort: Beispiel

i	0	1	2	3	4	5	6	7
	3	7	2	9	7	1	4	5
1	3	7	2	9	7	1	4	5
2	2	3	7	9	7	1	4	5
3	2	3	7	9	7	1	4	5
4	2	3	7	7	9	1	4	5
5	1	2	3	7	7	9	4	5
6	1	2	3	4	7	7	9	5
7	1	2	3	4	5	7	7	9

Graue Einträge wurden nicht bewegt.

Roter Eintrag wurde einsortiert.

Schwarze Einträge wurden um eins nach rechts verschoben.

Insertionsort: Algorithmus

```python
def insertion_sort(array):
    n = len(array)
    for i in range(1, n):  # i = 1, ..., n - 1
        # move array[i] to the left until it is
        # at the correct position.
        for j in range(i, 0, -1):  # j = i, ..., 1
            if array[j] < array[j-1]:
                # not yet at final position.
                # swap array[j] and array[j-1]
                array[j], array[j-1] = array[j-1], array[j]
            else:
                break  # continue with next i
```

Insertionsort: Algorithmus (etwas schneller)

Vorherige Version: meiste Zuweisungen an array[j-1] unnötig.

```
def insertion_sort(array):
    for i in range(1, len(array)):
        val = array[i]
        j = i
        while j > 0 and array[j - 1] > val:
            array[j] = array[j - 1]
            j -= 1
        array[j] = val
```

Laufzeitanalyse (später): kein fundamentaler Unterschied
trotzdem: zu bevorzugen, wenn direkte Zuweisung möglich

Insertionsort: Korrektheit

- Invariante 1: Zu Beginn jedes Durchlaufs der äusseren Schleife sind die Elemente an den Positionen $< i$ sortiert.
- Invariante 2: Sei *val* der Wert an Position i vor Beginn der inneren Schleife. Zu Beginn jedes Durchlaufs der inneren Schleife sind die Elemente an den Positionen j bis i grösser oder gleich *val*.
- Korrektheit der Invarianten per Induktion
- Die innere Schleife verändert die Reihenfolge der an eine höhere Position verschobenen Elemente nicht und das nach unten verschobene Element wird korrekt einsortiert.
- Nach letztem Schleifendurchlauf sind alle Elemente sortiert.

Insertionsort: Eigenschaften

- in place: zusätzlicher Speicherbedarf nicht abhängig von Eingabegrösse
- Zeitbedarf: adaptiv für teilsortierte Eingaben
  - Bei bereits sortierter Eingabe bricht innere Schleife direkt ab.
  - Bei umgekehrt sortierter Eingabe wird jedes Element schrittweise bis ganz vorne verschoben.

  genauere Analyse: nächste Woche
- stabil: Element wird nur so lange nach vorne verschoben, solange es mit echt grösserem Element getauscht wird.
  $\rightarrow$ kann nicht Reihenfolge mit gleichem Element tauschen.

A3.4 Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Selectionsort und Insertionsort sind zwei einfache Sortierverfahren.
- Selectionsort baut die sortierte Sequenz von vorne auf, indem es sukzessive ein minimales Element aus dem noch unsortierten Bereich an das Ende des sortierten Bereichs tauscht.
- Insertionsort betrachtet die Elemente von vorne nach hinten und sortiert sie in den bereits sortierten Bereich am Sequenzanfang ein.