Theorie der Informatik

G. Röger
Frühjahrssemester 2018

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 1

Abgabe: Mittwoch, 7. März 2018

Hinweis: In diesem Übungsblatt sollen Sie das korrekte Formulieren von Beweisen üben. Ein formal korrekter Beweis besteht aus einzelnen Schritten, von denen jeder *unmittelbar* aus den Schritten davor oder den Voraussetzungen hervorgeht (zum Beispiel wenn einen Wert durch seine Definition ersetzt wird). Schreiben Sie bitte die Beweise ausführlich und formal auf. Beispiele dafür finden Sie in den Vorlesungsfolien.

Aufgabe 1.1 (2 Punkte)

Beweisen Sie mit einem direkten Beweis, dass für beliebige Mengen A , B und C gilt:

$$((A \cap B) \cap C) = (A \cap (B \cap C))$$

Aufgabe 1.2 (Beweis durch Widerspruch; 2 + 2 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussagen mit einem Beweis durch Widerspruch.

- Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: Wenn n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade.
- Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ ist gegeben durch eine endliche Menge von Knoten V und einer Menge von Kanten $E \subseteq V^2$.

Ein Pfad der Länge n von Knoten u zu Knoten u' in G ist ein Tupel $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ so dass $v_1 = u$, $v_n = u'$ und für $1 \leq i < n$, $(v_i, v_{i+1}) \in E$.

Zeigen Sie durch Widerspruch: Ist $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ ein kürzester Pfad von v_1 zu v_n in G , so ist für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$ mit $1 \leq i \leq j \leq n$ das Tupel $\langle v_i, \dots, v_j \rangle$ ein kürzester Pfad von v_i nach v_j in G .

Aufgabe 1.3 (Strukturelle Induktion; 2 + 2 Punkte)

- Wir definieren zunächst induktiv eine einfache Teilmenge von mathematischen Ausdrücken, die nur die Zeichen „0“, „1“, „.“, „⊕“, „(“ und „)“ verwenden. Die Menge $\mathcal{E}$ der *einfachen Ausdrücke* ist induktiv wie folgt definiert:

- 0 und 1 sind einfache Ausdrücke.
- Wenn x und y einfache Ausdrücke sind, dann ist auch $(x \cdot y)$ ein einfacher Ausdruck.
- Wenn x und y einfache Ausdrücke sind, dann ist auch $(x \oplus y)$ ein einfacher Ausdruck.

Ausserdem definieren wir eine Funktion $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{N}_0$ als

- $f(0) = 0$, $f(1) = 1$
- $f((x \cdot y)) = f(x) \cdot f(y)$
- $f((x \oplus y)) = (f(x) + f(y)) \bmod 2$

Beweisen Sie durch strukturelle Induktion, dass für jeden einfachen Ausdruck $x \in \mathcal{E}$ gilt, dass

$$f(x) \in \{0, 1\}.$$

Hinweis: Bitte übersehen Sie nicht Teilaufgabe (b) auf der nächsten Seite.

(b) Wir definieren für die Binärbäume aus der Vorlesung zwei Funktionen $höhe : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{N}_0$ und $blätter : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{N}_0$, die jeden Binärbaum $B \in \mathcal{B}$ auf seine Höhe $höhe(B)$ bzw. die Anzahl seiner Blätter $blätter(B)$ abbilden:

- $höhe(\square) = 1$
- $höhe((B_L, \circ, B_R)) = \max(höhe(B_L), höhe(B_R)) + 1$
- $blätter(\square) = 1$
- $blätter((B_L, \circ, B_R)) = blätter(B_L) + blätter(B_R)$

Beweisen Sie durch strukturelle Induktion, dass für jeden Binärbaum $B \in \mathcal{B}$ gilt, dass

$$blätter(B) \leq 2^{höhe(B)-1}.$$