Algorithmen und Datenstrukturen

A7. Sortieren III

Marcel Lüthi and Gabriele Röger

Universität Basel

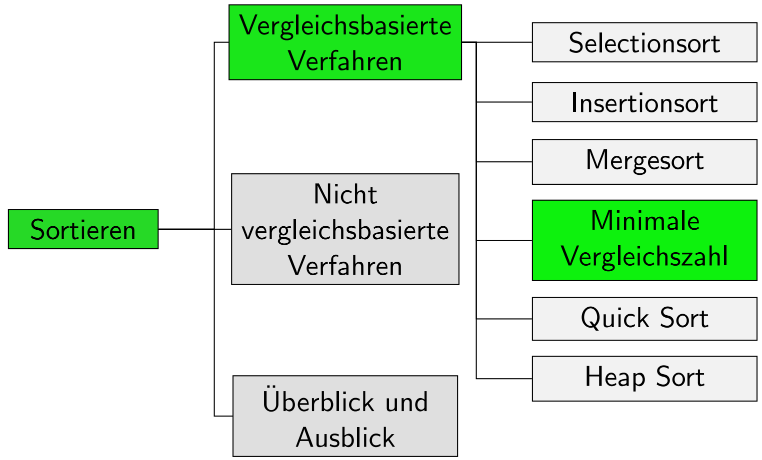
14. März 2018

Algorithmen und Datenstrukturen

14. März 2018 — A7. Sortieren III

A7.1 Untere Schranke

Sortierverfahren



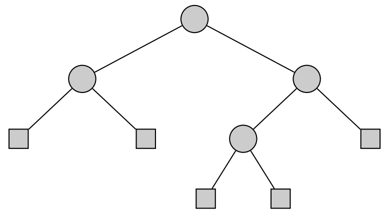
Untere Schranke I

- Mergesort hatte bisher mit $O(n \log_2 n)$ die beste (Worstcase-)Laufzeit.
- Geht es noch besser?
- Wir zeigen: Nicht mit vergleichsbasierten Verfahren!

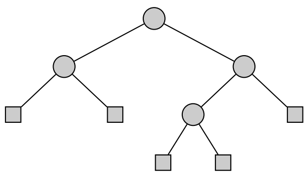
Untere Schranke II

Betrachte beliebigen vergleichsbasierten Sortieralgorithmus A.

- Verhalten hängt nur vom Ergebnis der Schlüsselvergleiche ab.
- Bei jedem Schlüsselvergleich gibt es zwei Möglichkeiten, wie der Algorithmus weiter macht.
- Wir können das graphisch als Baum darstellen.



Untere Schranke III



- Binärbaum: jeder Knoten hat höchstens zwei Nachfolger
- Knoten ohne Nachfolger heissen Blätter (Bild: eckige Knoten).
- Der Knoten ganz oben ist die Wurzel.
- Die Tiefe eines Blattes entspricht der Anzahl von Kanten von der Wurzel zu dem Blatt.

Die maximale Tiefe eines Blattes in einem Binärbaum mit k Blättern ist mindestens $\log_2 k$.

Untere Schranke IV

Was muss der Algorithmus können?

- Annahme: alle Elemente unterschiedlich
- Muss alle Eingaben der Grösse n korrekt sortieren.
- Wir können alle Algorithmen so anpassen, dass sie verfolgen, von welcher Position zu welcher Position die Elemente bewegt werden müssen.
- Das Ergebnis ist dann nicht das sortierte Array, sondern die entsprechende Permutation.
  Beispiel: pos0 $\mapsto$ pos2, pos1 $\mapsto$ pos1, pos2 $\mapsto$ pos0
- Da alle möglichen Eingaben der Grösse n korrekt gelösst werden müssen, muss der Algorithmus alle $n!$ möglichen Permutationen erzeugen können.

Untere Schranke V

- Jedes Blatt in der Baumdarstellung entspricht einer Permutation.
- Bei Eingabegrösse n muss der Baum also mindestens $n!$ Blätter haben.
- Die maximale Tiefe des entsprechenden Baumes ist demnach $\geq \log_2(n!)$.
- Es gibt also eine Eingabe der Grösse n mit $\geq \log_2(n!)$ Schlüsselvergleichen.

Untere Schranke VI

Abschätzung von $\log_2(n!)$

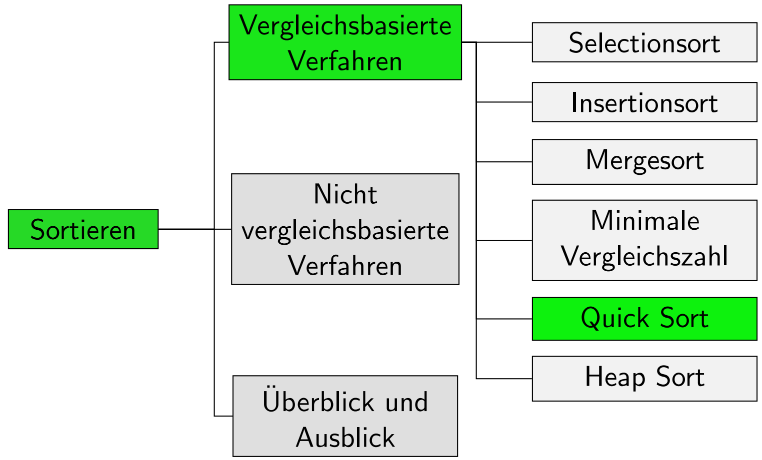
- Es gilt $n! \geq (n/2)^{n/2}$
  $4! = 1 \cdot 2 \cdot \underbrace{3}_{\geq 2} \cdot \underbrace{4}_{\geq 2} \geq 2^2$
- $\log_2(n!) \geq log_2((n/2)^{n/2}) = n/2 log_2(n/2)$
  $= n/2(\log_2 n - \log_2 2) = n/2(\log_2 n - 1)$

Theorem
Jeder vergleichsbasierte Sortieralgorithmus benötigt $\Omega(n \log n)$ viele Schlüsselvergleiche. Damit liegt auch die Laufzeit in $\Omega(n \log n)$.

Mergesort ist asymptotisch optimal.

A7.2 Quicksort

Sortierverfahren



Quicksort: Idee

- Wie Merge-Sort ein Divide-and-Conquer-Verfahren
- Die Sequenz wird nicht wie bei Mergesort nach Positionen aufgeteilt, sondern nach Werten.
- Hierfür wird ein Element P gewählt (das sogenannte Pivotelement).
- Dann wird so umsortiert, dass P an die endgültige Position kommt, vor P nur Elemente $\leq P$ stehen, und hinten nur Elemente $\geq P$.

$\leq P$	P	$\geq P$

- Macht man das rekursiv für den vorderen und den hinteren Teil, ist die Sequenz am Ende sortiert.

Quicksort: Algorithmus

```
def sort(array):
    sort_aux(array, 0, len(array)-1)

def sort_aux(array, lo, hi):
    if hi <= lo:
        return
    choose_pivot_and_swap_it_to_lo(array, lo, hi)
    pivot_pos = partition(array, lo, hi)
    sort_aux(array, lo, pivot_pos - 1)
    sort_aux(array, pivot_pos + 1, hi)
```


Wie wählt man das Pivot-Element?

Für die Korrektheit des Verfahrens ist das egal. (Warum?)

Wir können zum Bsp. folgende Strategien wählen:

- Naiv: Nimm immer erstes Element
- Median of Three: Verwende Median aus erstem, mittlerem und letztem Element
- Randomisiert: Wähle zufällig ein Element aus

Gute Pivot-Elemente teilen Sequenz in etwa gleich grosse Bereiche.

Wie macht man die Umsortierung?

array

	array	
lo (Pos 0), hi (Pos 5)	… 5 7 4 2 3 6 …	Pivot ist an Pos 0.
i (Pos 1), j (Pos 5)	… 5 7 4 2 3 6 …	Initialisiere $i = \text{lo} + 1, j = \text{hi}$ i nach rechts bis zu Element $\geq$ Pivot, j nach links bis Element $\leq$ Pivot
i (Pos 1), j (Pos 4)	… 5 7 4 2 3 6 …	Falls $i < j$: Elemente tauschen, i++, j−−
i (Pos 2), j (Pos 3)	… 5 3 4 2 7 6 …	i nach rechts bis zu Element $\geq$ Pivot, j nach links bis Element $\leq$ Pivot
j (Pos 3), i (Pos 4)	… 5 3 4 2 7 6 …	$i \geq j$: noch Pivot an Pos j tauschen
j (Pos 3), i (Pos 4)	… 2 3 4 5 7 6 …	Fertig!

Quicksort: Partitionierung

```python
def partition(array, lo, hi):
    pivot = array[lo]
    i = lo + 1
    j = hi
    while (True):
        while i < hi and array[i] < pivot:
            i += 1
        while array[j] > pivot:
            j -= 1
        if i >= j:
            break

        array[i], array[j] = array[j], array[i]
        i, j = i + 1, j - 1
    array[lo], array[j] = array[j], array[lo]
    return j
```


Quicksort: Laufzeit I

Best case: Pivot-Element teilt in gleich grosse Bereiche

- $\log_2 n$ rekursive Aufrufe
- jeweils hi-lo Schlüsselvergleiche in Partitionierung
- auf einer Rekursionsebene insgesamt $O(n)$ Vergleiche in Partitionierung

$\rightarrow$ $O(n \log n)$

Worst case: Pivot-Element immer kleinstes oder grösstes Element

- insgesamt n-1 (nichttriviale) rekursive Aufrufe für Länge $n, n-1, \ldots, 2.$
- jeweils hi-lo Schlüsselvergleiche in Partitionierung

$\rightarrow$ $\Theta(n^2)$

Quicksort: Laufzeit II

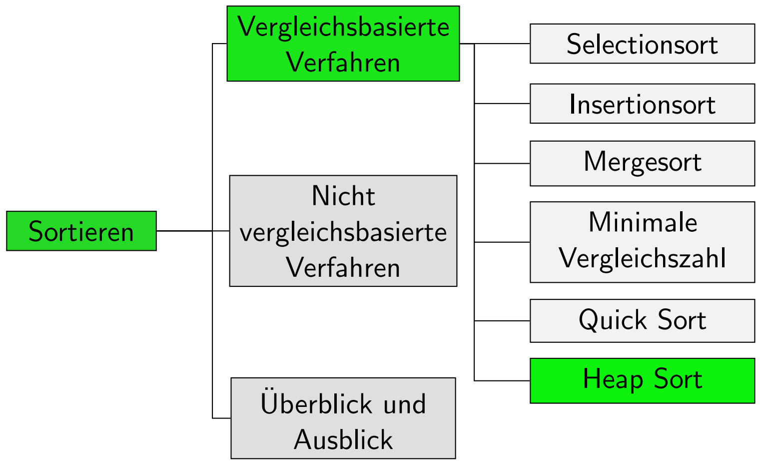
Average case:

- Annahme: n verschiedene Elemente, jede der $n!$ Permutationen gleich wahrscheinlich, Pivotelement zufällig gewählt
- $O(\log n)$ rekursive Aufrufe
- insgesamt $O(n \log n)$
- etwa 39% langsamer als best case

Bei randomisierter Pivotwahl tritt worst-case quasi nicht auf.
Quicksort wird daher oft als $O(n \log n)$-Verfahren betrachtet.

A7.3 Heapsort

Sortierverfahren

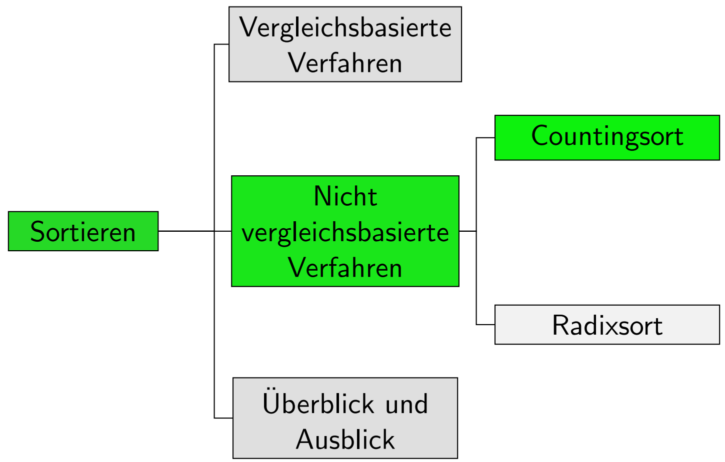


Heapsort

- Heap: Datenstruktur, die das Finden und Entnehmen des grössten Elements besonders effizient unterstützt
  Finden: $\Theta(1)$, Entnehmen: $\Theta(\log n)$
- Grundidee analog zu Selectionsort: Setze sukzessive das grösste Element an das Ende des unsortierten Bereichs.
- Kann den Heap direkt in der Eingabesequenz repräsentieren.
- Wir besprechen die Details später, wenn wir Heaps genauer kennengelernt haben.

A7.4 Nicht vergleichsbasierte Verfahren

Sortierverfahren



Countingsort: Idee

„Sortieren durch Zählen"

- Annahme: Elemente sind aus Bereich $0, \dots, k-1$.
- Laufe einmal über die Eingabesequenz und zähle dabei, wie oft jedes Element vorkommt.
- Sei $\#i$ die Anzahl der Vorkommen von Element i.
- Iteriere $i = 0, \dots, k-1$ und schreibe jeweils $\#i$-mal Element i in die Sequenz.

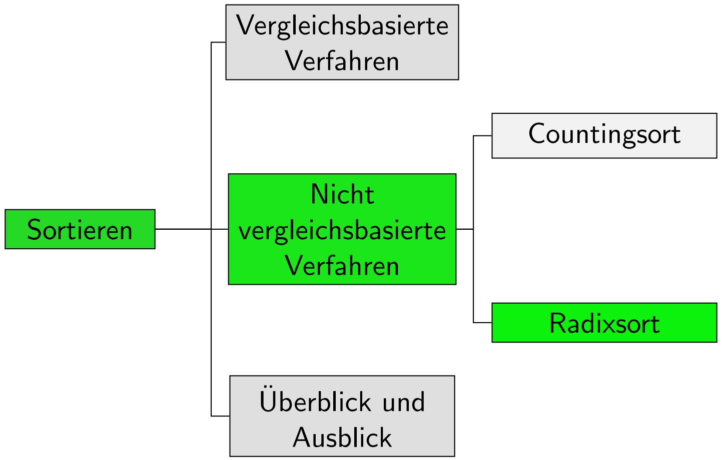
Countingsort: Algorithmus

```python
def sort(array, k):
    counts = [0] * k  # list of k zeros
    for elem in array:
        counts[elem] += 1

    pos = 0
    for i in range(k):
        occurrences_of_i = counts[i]
        for j in range(occurrences_of_i):
            array[pos + j] = i
        pos += occurrences_of_i
```

Laufzeit: $O(n+k)$ (n Grösse der Eingabesequenz)
$\rightarrow$ Für festes k linear

Sortierverfahren



Radixsort: Idee

„Sortieren durch Fachverteilen"

- Annahme: Schlüssel sind Zahlen im Dezimalsystem
  z.B. 763, 983, 96, 286, 462
- Teile Zahlen nach letzter Stelle auf:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		462	763			96			
			983			286			

- Sammle Zahlen von vorne nach hinten/oben nach unten auf
  462, 763, 983, 96, 286
- Teile Zahlen nach vorletzter Stelle auf, sammle sie auf.
- Teile Zahlen nach drittletzter Stelle auf, sammle sie auf.
- usw. bis alle Stellen betrachtet wurden.

Radixsort: Beispiel

- Eingabe: 763, 983, 96, 286, 462
- Aufteilung nach letzter Stelle:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		462	763			96			
			983			286			

Aufsammeln ergibt: 462, 763, 983, 96, 286

- Aufteilung nach vorletzter Stelle:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
						462		983	96
						763		286	

Aufsammeln ergibt: 462, 763, 983, 286, 96

- Aufteilung nach drittletzter Stelle:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
096		286		462			763		983

Aufsammeln ergibt: 96, 286, 462, 763, 983

Radixsort: Algorithmus (für beliebige Basis)

```
def sort(array, base=10):
    if not array:  # array is empty
        return
    iteration = 0
    max_val = max(array) # identify largest element
    while base ** iteration <= max_val:
        buckets = [[] for num in range(base)]
        for elem in array:
            digit = (elem // (base ** iteration)) % base
            buckets[digit].append(elem)
        pos = 0
        for bucket in buckets:
            for elem in bucket:
                array[pos] = elem
                pos += 1
        iteration += 1
```


Radixsort: Laufzeit

- m: Maximale Anzahl Stellen in Repräsentation mit gegebener Basis b.
- n: Länge der Eingabesequenz
- Laufzeit in $O(m \cdot (n + b))$

Für festes m und b hat Radixsort lineare Laufzeit.

A7.5 Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Jedes vergleichsbasierte Sortierverfahren hat mindestens leicht überlineare Laufzeit.
- Quicksort ist ein Divide-and-Conquer-Verfahren, das die Elemente relativ zu einem Pivotelement aufteilt.
- Countingsort und Radixsort sind nicht vergleichsbasiert und erlauben ein Sortieren in linearer Zeit.
- Sie machen jedoch zusätzliche Einschränkungen an die verwendeten Schlüssel.