Theorie der Informatik

20. Satz von Cook und Levin

Malte Helmert Gabriele Röger

Universität Basel

14. Mai 2014

Überblick: Vorlesung

Vorlesungsteile

I. Logik ✓
II. Automatentheorie und formale Sprachen ✓
III. Berechenbarkeitstheorie ✓
IV. Komplexitätstheorie

Überblick: Komplexitätstheorie

IV. Komplexitätstheorie

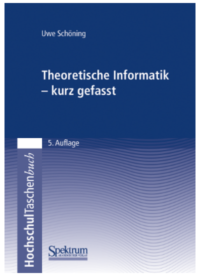
18. Motivation und Einführung ✓
19. P, NP und polynomielle Reduktionen ✓
20. Satz von Cook und Levin
21. einige NP-vollständige Probleme

Nachlesen

Literatur zu diesem Vorlesungskapitel

Theoretische Informatik - kurz gefasst
von Uwe Schöning (5. Auflage)

- Kapitel 3.2



20.1 Satz von Cook und Levin

SAT ist NP-vollständig

Definition (SAT)

Das Problem SAT (Erfüllbarkeit = satisfiability) ist wie folgt definiert:

Gegeben: eine aussagenlogische Formel φ

Frage: Ist φ erfüllbar?

Satz (Cook, 1971; Levin, 1973)

SAT *ist NP-vollständig.*

Beweis.

SAT $\in$ NP: Raten und prüfen.
SAT ist NP-hart: etwas komplizierter (wird fortgesetzt) ...

NP-Härte von SAT (1)

Beweis (Fortsetzung).

Wir müssen zeigen: $A \leq_{\mathrm{p}} \mathrm{SAT}$ für alle $A \in \mathrm{NP}$.

Sei A ein beliebiges Problem in NP.

Wir müssen eine polynomielle Reduktion von A auf SAT finden, also eine in polynomieller Zeit berechenbare Funktion f, so dass für jedes Eingabewort w für A gilt:

$w \in A$ gdw. $f(w)$ ist eine erfüllbare aussagenlogische Formel. ...

NP-Härte von SAT (2)

Beweis (Fortsetzung).

Wegen $A \in \mathrm{NP}$ gibt es eine NTM M und ein Polynom p, so dass M das Problem A in Zeit p akzeptiert.

Idee: Konstruiere eine Formel, die die möglichen Konfigurationen kodiert, die M auf Eingabe w in Zeit $p(|w|)$ durchlaufen kann, und die genau dann erfüllbar ist, wenn in dieser Zeit eine Endkonfiguration erreicht werden kann. ...

NP-Härte von SAT (3)

Beweis (Fortsetzung).

Sei $M = \langle Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, E\rangle$ eine NTM für A und sei p ein Polynom, das die Laufzeit von M beschränkt.

Sei $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ die Eingabe für M.

Nummerieren wir die Bandpositionen mit ganzen Zahlen (positiv und negativ), so dass der TM-Kopf zu Beginn auf Position 1 steht.

Beobachtung: innert $p(n)$ vielen Berechnungsschritten kann der TM-Kopf nur Positionen aus der Menge $Pos = \{-p(n)+1, -p(n)+2, \dots, -1, 0, 1, \dots, p(n)+1\}$ erreichen.

Statt unendlich vieler Bandpositionen müssen wir nur diese (polynomiell vielen!) Positionen berücksichtigen. ...

NP-Härte von SAT (4)

Beweis (Fortsetzung).

Wir können Konfigurationen von M kodieren, indem wir angeben:

- was der aktuelle Zustand von M ist
- auf welche Zelle in Pos der TM-Kopf zeigt
- welche Symbole aus Γ das Band auf den Positionen in Pos beinhaltet

$\rightsquigarrow$ durch Aussagevariablen kodierbar

Um nicht nur eine Konfiguration, sondern eine Berechnung zu kodieren, benötigen wir eine Kopie dieser Variablen für jeden Schritt der Berechnung.

Wir müssen dabei nur die Berechnungsschritte $Steps = \{0, 1, \dots, p(n)\}$ berücksichtigen, denn M soll innert $p(n)$ Schritten akzeptieren. ...

NP-Härte von SAT (5)

Beweis (Fortsetzung).

Verwende die folgenden Aussagevariablen in der Formel $f(w)$:

- $state_{t,z}$ ($t \in Steps$, $z \in Z$)
  $\rightsquigarrow$ kodiert Zustand der NTM in der t-ten Konfiguration
- $head_{t,i}$ ($t \in Steps$, $i \in Pos$)
  $\rightsquigarrow$ kodiert Kopfposition in der t-ten Konfiguration
- $tape_{t,i,a}$ ($t \in Steps$, $i \in Pos$, $a \in \Gamma$)
  $\rightsquigarrow$ kodiert Bandinhalt in der t-ten Konfiguration

Konstruiere $f(w)$ so, dass jede erfüllende Belegung

- eine Folge von Konfigurationen der TM beschreibt,
- die mit der Startkonfiguration beginnt,
- eine akzeptierende Konfiguration erreicht
- und den TM-Regeln in δ folgt

...

NP-Härte von SAT (6)

Beweis (Fortsetzung).

Kleiner Trick: Modifiziere M so, dass sie in jedem Zustand die Möglichkeit hat, nichts zu tun.

- Füge δ Transitionen der Form $\langle\langle z, a\rangle, \langle z, a, \mathrm{N}\rangle\rangle$ für jedes z und a hinzu.
- Ändert das Akzeptanz-Verhalten von M nicht und erlaubt uns anzunehmen, dass eine akzeptierende Berechnung genau $p(n)$ Schritte braucht statt höchstens $p(n)$ Schritte.
- Das macht uns im Folgenden das Leben etwas leichter.

...

NP-Härte von SAT (7)

Beweis (Fortsetzung).

Hilfsformel:

$$\mathit{oneof}\ X := \left(\bigvee_{x \in X} x\right) \land \neg \left(\bigvee_{x \in X} \bigvee_{y \in X \setminus \{x\}} (x \land y)\right)$$

1. Beschreibe Folge von Konfigurationen der TM:

$$\begin{aligned} \mathit{Valid} := \bigwedge_{t \in \mathit{Steps}} \Big(& \mathit{oneof}\ \{\mathit{state}_{t,z} \mid z \in Z\} \land \\ & \mathit{oneof}\ \{\mathit{head}_{t,i} \mid i \in \mathit{Pos}\} \land \\ & \bigwedge_{i \in \mathit{Pos}} \mathit{oneof}\ \{\mathit{tape}_{t,i,a} \mid a \in \Gamma\}\Big) \end{aligned}$$

...

NP-Härte von SAT (8)

Beweis (Fortsetzung).

2. Beginne in Startkonfiguration

$$\mathit{Init} := \mathit{state}_{0,z_0} \land \mathrm{head}_{0,1} \land \bigwedge_{i=1}^{n} \mathit{tape}_{0,i,w_i} \land \bigwedge_{i \in \mathit{Pos} \setminus \{1,\dots,n\}} \mathit{tape}_{0,i,\square}$$

...

NP-Härte von SAT (9)

Beweis (Fortsetzung).

3. Erreiche eine akzeptierende Konfiguration

$$\mathit{Accept} := \bigvee_{q_e \in E} \mathit{state}_{p(n),q_e}$$

...

NP-Härte von SAT (10)

Beweis (Fortsetzung).

4. Folge den Regeln in δ:

$$Trans := \bigwedge_{t \in Steps} \left(\bigvee_{q_e \in E} state_{t,q_e} \vee \bigvee_{R \in \delta} Rule_{t,R} \right)$$

wobei. . . . . .

NP-Härte von SAT (11)

Beweis (Fortsetzung).

4. Folge den Regeln in δ (Fortsetzung):

$$\begin{aligned} &Rule_{t,\langle\langle z,a\rangle,\langle z',a',y\rangle\rangle} := \\ &\quad state_{t,z} \wedge state_{t+1,z'} \wedge \\ &\quad \bigwedge_{i \in Pos} \left(head_{t,i} \rightarrow tape_{t,i,a} \wedge head_{t+1,i+y} \wedge tape_{t+1,i,a'} \right) \wedge \\ &\quad \bigwedge_{i \in Pos} \bigwedge_{a'' \in \Gamma} \left(\neg head_{t,i} \wedge tape_{t,i,a''} \rightarrow tape_{t+1,i,a''} \right) \end{aligned}$$

(Spezialfall: *tape*- und *head*-Variablen, bei denen der Bandindex $i + y$ ausserhalb von *Pos* liegt, durch $\perp$ ersetzen; ebenso Variablen, bei denen der Zeitindex ausserhalb von *Steps* liegt.) . . .

NP-Härte von SAT (12)

Beweis (Fortsetzung).

Alles zusammengesetzt:

Setze $f(w) := Valid \wedge Init \wedge Accept \wedge Trans$.

- $f(w)$ kann in polynomieller Zeit in $|w|$ konstruiert werden.
- $w \in A$ gdw. M akzeptiert w in $p(|w|)$ Schritten
  gdw. $f(w)$ ist erfüllbar
  gdw. $f(w) \in \mathrm{SAT}$

$\rightsquigarrow$ $A \leq_p \mathrm{SAT}$

Da $A \in \mathrm{NP}$ beliebig war, gilt dies für jedes $A \in \mathrm{NP}$.
Folglich ist SAT NP-hart und damit auch NP-vollständig. □

20.2 Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik (SAT) ist NP-vollständig.
- Beweisidee für die NP-Härte:
  - Jedes Problem in NP kann durch eine NTM in polynomieller Zeit $p(|w|)$ bei Eingabe w gelöst werden.
  - Stelle zu Wort w eine aussagenlogische Formel φ auf, die die Berechnungsschritte der NTM auf Eingabe w kodiert.
  - Konstruiere φ so, dass es genau dann erfüllt werden kann, wenn es eine akzeptierende Berechnung der Länge $p(|w|)$ gibt.