

Theorie der Informatik

13. LOOP-, WHILE- und GOTO-Berechenbarkeit

Malte Helmert Gabriele Röger

Universität Basel

9. April 2014

Theorie der Informatik

9. April 2014 — 13. LOOP-, WHILE- und GOTO-Berechenbarkeit

13.1 Einleitung

13.2 LOOP-Programme

13.3 WHILE-Programme

13.4 GOTO-Programme

13.5 Zusammenfassung

Überblick: Vorlesung

Vorlesungsteile

- I. Logik ✓
- II. Automatentheorie und formale Sprachen ✓
- III. Berechenbarkeitstheorie
- IV. Komplexitätstheorie

Überblick: Berechenbarkeitstheorie

III. Berechenbarkeitstheorie

12. Turing-Berechenbarkeit ✓
13. LOOP-, WHILE- und GOTO-Berechenbarkeit
14. primitive Rekursion und μ -Rekursion
15. Ackermannfunktion
16. Entscheidbarkeit, Reduktionen, Halteproblem
17. Postsches Korrespondenzproblem
 - Unentscheidbare Grammatik-Probleme
 - Gödelscher Satz und diophantische Gleichungen

Literatur zu diesem Vorlesungskapitel

Theoretische Informatik - kurz gefasst
von Uwe Schöning (5. Auflage)

- ▶ **Kapitel 2.3**



13.1 Einleitung

Formale Berechnungsmodelle: LOOP/WHILE/GOTO

Formale Berechnungsmodelle

- ▶ Turingmaschinen
- ▶ **LOOP-, WHILE-, GOTO-Programme**
- ▶ primitiv rekursive Funktionen, μ -rekursive Funktionen

In diesem Kapitel lernen wir drei einfache Berechnungsformalisen (Programmiersprachen) kennen und vergleichen ihre Mächtigkeit mit Turingmaschinen:

- ▶ **LOOP-Programme**
- ▶ **WHILE-Programme**
- ▶ **GOTO-Programme**

LOOP-, WHILE- und GOTO-Programme: Grundkonzepte

- ▶ LOOP-, WHILE- und GOTO-Programme entsprechen strukturell (einfachen) „traditionellen“ Programmiersprachen
- ▶ verwenden endlich viele Variablen aus der Menge $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, die Werte in \mathbb{N}_0 annehmen
- ▶ unterscheiden sich in Art der erlaubten „Anweisungen“

13.2 LOOP-Programme

LOOP-Programme: Syntax

Definition (LOOP-Programm)

LOOP-Programme sind definiert durch endliche Anwendung folgender Regeln:

- ▶ $x_i := x_j + c$ ist ein LOOP-Programm für jedes $i, j, c \in \mathbb{N}_0$ (**Addition**)
- ▶ $x_i := x_j - c$ ist ein LOOP-Programm für jedes $i, j, c \in \mathbb{N}_0$ (**modifizierte Subtraktion**)
- ▶ Wenn P_1 und P_2 LOOP-Programme sind, dann auch $P_1; P_2$ (**Komposition**)
- ▶ Wenn P ein LOOP-Programm ist, dann auch **LOOP** x_i **DO** P **END** für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ (**LOOP-Schleife**)

LOOP-Programme: Semantik

Definition (Semantik von LOOP-Programmen)

Ein LOOP-Programm **berechnet** eine k -stellige Funktion $f : \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{N}_0$. Die Berechnung von $f(n_1, \dots, n_k)$ erfolgt wie folgt:

- ① Zu Beginn beinhalten die Variablen x_1, \dots, x_k die Werte n_1, \dots, n_k , alle anderen Variablen den Wert 0.
- ② Danach modifiziert das Programm die Variableninhalte wie auf den folgenden Folien beschrieben.
- ③ Der Inhalt der Variable x_0 nach Ausführung des Programms ist das Ergebnis der Berechnung.

LOOP-Programme: Semantik

Definition (Semantik von LOOP-Programmen)

Auswirkung von $x_i := x_j + c$:

- ▶ Der Variable x_i wird der aktuelle Wert von x_j plus c zugewiesen.
- ▶ Alle anderen Variableninhalte bleiben gleich.

LOOP-Programme: Semantik

Definition (Semantik von LOOP-Programmen)

Auswirkung von $x_i := x_j - c$:

- ▶ Der Variable x_i wird der aktuelle Wert von x_j minus c zugewiesen, sofern dieser Wert nicht-negativ ist.
- ▶ Ansonsten erhält x_i den Wert 0.
- ▶ Alle anderen Variableninhalte bleiben gleich.

LOOP-Programme: Semantik

Definition (Semantik von LOOP-Programmen)

Auswirkung von $P_1; P_2$:

- ▶ Es wird zuerst P_1 und anschliessend (auf den modifizierten Variablenwerten) P_2 ausgeführt.

LOOP-Programme: Semantik

Definition (Semantik von LOOP-Programmen)

Auswirkung von **LOOP** x_i **DO** P **END**:

- ▶ Sei m der Wert der Variable x_i bei Beginn der Ausführung.
- ▶ Es wird m mal hintereinander das Programm P ausgeführt.

LOOP-berechenbare Funktionen

Definition (LOOP-berechenbar)

Eine Funktion $f : \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{N}_0$ heisst **LOOP-berechenbar**, wenn ein LOOP-Programm existiert, das sie berechnet.

Anmerkung: Nicht-totale Funktionen sind nie LOOP-berechenbar. (Warum nicht?)

LOOP-Programme: Beispiel

Beispiel (LOOP-Programm für $f(x_1, x_2)$)

```

LOOP  $x_1$  DO
  LOOP  $x_2$  DO
     $x_0 := x_0 + 1$ 
  END
END

```

Welche 2-stellige Funktion berechnet das Programm?

Syntaktischer Zucker oder essentielles Feature?

- ▶ Wir untersuchen die Mächtigkeit von Programmiersprachen (und anderen Formalismen).
- ▶ **Reichhaltige** Sprach-Features sind nützlich, um komplexe Programme schreiben zu können.
- ▶ **Minimalistische** Formalismen sind nützlicher, wenn wir Beweise über **alle** Programme führen wollen.

↔ Interessenkonflikt!

Idee:

- ▶ Verwende **minimalistischen Kern** für Beweise.
- ▶ Verwende **syntaktischen Zucker**, um Programme zu schreiben.

Beispiel: syntaktischer Zucker

Beispiel (Syntaktischer Zucker)

Wir schlagen fünf neue Syntaxkonstrukte vor (mit der offensichtlichen Semantik):

- ▶ $x_i := x_j$ für $i, j \in \mathbb{N}_0$
- ▶ $x_i := c$ für $i, c \in \mathbb{N}_0$
- ▶ $x_i := x_j + x_k$ für $i, j, k \in \mathbb{N}_0$
- ▶ **IF** $x_i \neq 0$ **THEN** P **END** für $i \in \mathbb{N}_0$
- ▶ **IF** $x_i = c$ **THEN** P **END** für $i, c \in \mathbb{N}_0$

Können wir diese mit den existierenden Konstrukten simulieren?

Beispiel: syntaktischer Zucker

Beispiel (Syntaktischer Zucker)

$x_i := x_j$ für $i, j \in \mathbb{N}_0$

Einfache Kurzschreibweise für $x_i := x_j + 0$.

Beispiel: syntaktischer Zucker

Beispiel (Syntaktischer Zucker)

$x_i := c$ für $i, c \in \mathbb{N}_0$

Einfache Kurzschreibweise für $x_i := x_j + c$,
wobei x_j eine frische Variable ist, d.h. eine ansonsten
unbenutzte Variable, die keine Eingabevariable ist.
(Daher enthält x_j zwangsläufig den Wert 0.)

Beispiel: syntaktischer Zucker

Beispiel (Syntaktischer Zucker)

$x_i := x_j + x_k$ für $i, j, k \in \mathbb{N}_0$

Abkürzung für:

```
x_i := x_j;
LOOP x_k DO
  x_i := x_i + 1
END
```

Analog verwenden wir im Folgenden auch:

- ▶ $x_i := x_j - x_k$
- ▶ $x_i := x_j + x_k - c - x_m + d$
- ▶ usw.

Beispiel: syntaktischer Zucker

Beispiel (Syntaktischer Zucker)

IF $x_i \neq 0$ THEN P END für $i \in \mathbb{N}_0$

Abkürzung für:

```
x_j := 0;
LOOP x_i DO
  x_j := 1
END;
LOOP x_j DO
  P
END
```

wobei x_j eine frische Variable ist.

Beispiel: syntaktischer Zucker

Beispiel (Syntaktischer Zucker)

IF $x_i = c$ THEN P END für $i, c \in \mathbb{N}_0$

Abkürzung für:

```
x_j := 1;
x_k := x_i - c;
IF x_k \neq 0 THEN x_j := 0 END;
x_k := c - x_i;
IF x_k \neq 0 THEN x_j := 0 END;
IF x_j \neq 0 THEN
  P
END
```

wobei x_j und x_k frische Variablen sind.

Geht es noch minimalistischer?

- ▶ Wir sehen, dass wir z. B. IF-Konstrukte nicht benötigen, da sie syntaktischer Zucker sind.
- ▶ Können wir LOOP-Programme noch minimalistischer gestalten als in unserer Definition?

Vereinfachung 1

Statt $x_i := x_j + c$ und $x_i := x_j - c$ reicht es, nur die Konstrukte

- ▶ $x_i := x_j$,
- ▶ $x_i := x_j + 1$ und
- ▶ $x_i := x_j - 1$

zu erlauben.

Warum?

Geht es noch minimalistischer?

- ▶ Wir sehen, dass wir z. B. IF-Konstrukte nicht benötigen, da sie syntaktischer Zucker sind.
- ▶ Können wir LOOP-Programme noch minimalistischer gestalten als in unserer Definition?

Vereinfachung 2:

Das Konstrukt $x_i := x_j$ kann weggelassen werden, da man es durch die anderen Konstrukte simulieren kann:

```

LOOP  $x_i$  DO
   $x_i := x_i - 1$ 
END;
LOOP  $x_j$  DO
   $x_i := x_i + 1$ 
END
  
```

13.3 WHILE-Programme

WHILE-Programme: Syntax

Definition (WHILE-Programm)

WHILE-Programme sind definiert durch endliche Anwendung folgender Regeln:

- ▶ $x_i := x_j + c$ ist ein WHILE-Programm für jedes $i, j, c \in \mathbb{N}_0$ (**Addition**)
- ▶ $x_i := x_j - c$ ist ein WHILE-Programm für jedes $i, j, c \in \mathbb{N}_0$ (**modifizierte Subtraktion**)
- ▶ Wenn P_1 und P_2 WHILE-Programme sind, dann auch $P_1; P_2$ (**Komposition**)
- ▶ Wenn P ein WHILE-Programm ist, dann auch **WHILE** $x_i \neq 0$ **DO** P **END** für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ (**WHILE-Schleife**)

WHILE-Programme: Semantik

Definition (Semantik von WHILE-Programmen)

Die Semantik von WHILE-Programmen ist genauso definiert wie bei LOOP-Programmen.

Auswirkung von **WHILE** $x_i \neq 0$ **DO** P **END**:

- ▶ Falls x_i den Wert 0 beinhaltet, ist die Ausführung des Programms beendet.
- ▶ Ansonsten führe P aus.
- ▶ Wiederhole die vorigen beiden Schritte beliebig oft.

WHILE-berechenbare Funktionen

Definition (WHILE-berechenbar)

Eine Funktion $f : \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{N}_0$ heisst **WHILE-berechenbar**, wenn ein WHILE-Programm existiert, das sie berechnet.

WHILE-Berechenbarkeit vs. LOOP-Berechenbarkeit

Satz (WHILE-Berechenbarkeit vs. LOOP-Berechenbarkeit)

*Jede LOOP-berechenbare Funktion ist WHILE-berechenbar.
Die Umkehrung gilt nicht.*

WHILE-Programme sind also **echt mächtiger** als LOOP-Programme.

WHILE-Berechenbarkeit vs. LOOP-Berechenbarkeit

Beweis.

Teil 1: Jede LOOP-berechenbare Funktion ist WHILE-berechenbar.

Wir konstruieren zu jedem LOOP-Programm ein äquivalentes WHILE-Programm.

Ersetze hierfür jedes Auftreten von **LOOP** x_j **DO** P **END** durch

```

 $x_j := x_j;$ 
WHILE  $x_j \neq 0$  DO
   $x_j := x_j - 1;$ 
   $P$ 
END

```

wobei x_j jeweils eine frische Variable ist. ...

WHILE-Berechenbarkeit vs. LOOP-Berechenbarkeit

Beweis (Fortsetzung).

Teil 2: Nicht jede WHILE-berechenbare Funktion ist LOOP-berechenbar.

Das WHILE-Programm

```
x1 := 1
WHILE x1 ≠ 0 DO
  x1 := 1
END
```

zeigt, dass die überall undefinierte Funktion WHILE-berechenbar ist. LOOP-berechenbare Funktionen sind aber immer total. □

Anmerkung: Wir werden später zeigen, dass es auch totale Funktionen gibt, die WHILE-berechenbar, aber nicht LOOP-berechenbar sind.

WHILE-Berechenbarkeit vs. Turing-Berechenbarkeit

Satz (WHILE-Berechenbarkeit vs. Turing-Berechenbarkeit)

Jede WHILE-berechenbare Funktion ist Turing-berechenbar.

(Die umgekehrte Aussage diskutieren wir später.)

WHILE-Berechenbarkeit vs. Turing-Berechenbarkeit

Beweisskizze.

Wir konstruieren zu jedem WHILE-Programm eine äquivalente deterministische Turingmaschine.

Seien x_1, \dots, x_k die Eingabevariablen des WHILE-Programms, und seien x_0, \dots, x_m alle verwendeten Variablen.

Grundideen:

- ▶ Die DTM simuliert die einzelnen Ausführungsschritte des WHILE-Programms.
- ▶ Vor und nach jedem WHILE-Programm-Schritt enthält das Band den Inhalt $bin(n_0)\#bin(n_1)\#\dots\#bin(n_m)$, wobei n_i der Wert der WHILE-Programm-Variablen x_i ist.
- ▶ Es reicht, „minimalistische“ WHILE-Programme nachzubilden ($x_i := x_i + 1$, $x_i := x_i - 1$, Komposition, WHILE-Schleife).

...

WHILE-Berechenbarkeit vs. Turing-Berechenbarkeit

Beweisskizze (Fortsetzung).

Die DTM besteht aus drei hintereinander geschalteten Teilen:

- ▶ **Initialisierung:**
 - ▶ Schreibe $0\#$ vor den benutzten Teil des Bandes.
 - ▶ Schreibe $(m - k)$ mal $\#0$ hinter den benutzten Teil des Bandes.
- ▶ **Programmausführung:**
Simuliere das WHILE-Programm (siehe nächste Folie).
- ▶ **Aufräumen:**
 - ▶ Ersetze alle Zeichen ab dem ersten $\#$ durch \square und gehe abschliessend zum ersten Zeichen, das nicht \square ist.

...

WHILE-Berechenbarkeit vs. Turing-Berechenbarkeit

Beweisskizze (Fortsetzung).

Simulation von $x_i := x_i + 1$:

- ① Gehe nach links bis Blank erreicht, dann einen Schritt nach rechts.
 - ② $(i + 1)$ mal: Gehe nach rechts, bis # oder \square erreicht.
 - ③ Gehe einen Schritt nach links.
- ↔ Wir stehen jetzt auf der letzten Ziffer der Kodierung von x_i .
- ④ Führe DTM für Inkrement um 1 aus. (Schwierigster Teil: „Platz schaffen“, wenn sich die Zahl der Binärziffern erhöht.)

...

WHILE-Berechenbarkeit vs. Turing-Berechenbarkeit

Beweisskizze (Fortsetzung).

Simulation von $x_i := x_i - 1$:

- ① Gehe zur letzten Ziffer von x_i (siehe vorige Folie).
- ② Teste, ob die Ziffer eine 0 und das Symbol links davon # oder \square ist. Dann fertig.
- ③ Ansonsten: führe DTM für Dekrement um 1 aus. Wenn dabei eine führende 0 gefolgt von einer Ziffer entsteht, die führende 0 entfernen. (Band „zusammen schieben“.)

...

WHILE-Berechenbarkeit vs. Turing-Berechenbarkeit

Beweisskizze (Fortsetzung).

Simulation von $P_1; P_2$:

- ① Baue rekursiv DTMs M_1 für P_1 und M_2 für P_2 .
- ② Baue daraus eine DTM für $P_1; P_2$, indem alle Übergänge auf Endzustände von M_1 statt dessen auf den Startzustand von M_2 übergehen.

...

WHILE-Berechenbarkeit vs. Turing-Berechenbarkeit

Beweisskizze (Fortsetzung).

Simulation von WHILE $x_i \neq 0$ DO P END:

- ① Baue rekursiv DTM M für P .
- ② Baue eine DTM M' für WHILE $x_i \neq 0$ DO P END, die wie folgt arbeitet:
 - ① Gehe zur letzten Ziffer von x_i .
 - ② Teste, ob dort das Symbol 0 und davor # oder \square steht. Falls ja: fertig.
 - ③ Ansonsten führe M aus, wobei in M alle Übergänge auf den Endzustand von M durch Übergänge auf den Anfangszustand von M' ersetzt werden.

□

Zwischenstand

Wir wissen jetzt:

- ▶ WHILE-Programme sind echt mächtiger als LOOP-Programme.
- ▶ Deterministische Turingmaschinen sind mindestens so mächtig wie WHILE-Programme.

Sind DTMs **echt mächtiger** als WHILE-Programme oder **gleich mächtig**?

Um diese Frage zu beantworten, machen wir einen Umweg über einen weiteren Programmiersprachen-Formalismus.

13.4 GOTO-Programme

GOTO-Programme: Syntax

Definition (GOTO-Programm)

Ein **GOTO-Programm** ist gegeben durch eine endliche Folge

$$L_1 : A_1, L_2 : A_2, \dots, L_n : A_n$$

von **Marken** (Labels) und **Anweisungen**.

Anweisungen sind von folgender Form:

- ▶ $x_i := x_j + c$ für jedes $i, j, c \in \mathbb{N}_0$ (**Addition**)
- ▶ $x_i := x_j - c$ für jedes $i, j, c \in \mathbb{N}_0$ (**modifizierte Subtraktion**)
- ▶ **HALT** (**Programmende**)
- ▶ **GOTO** L_j für $1 \leq j \leq n$ (**Sprung**)
- ▶ **IF** $x_i = c$ **THEN GOTO** L_j für $i, c \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq j \leq n$ (**bedingter Sprung**)

GOTO-Programme: Semantik

Definition (Semantik von GOTO-Programmen)

- ▶ Ein- und Ausgaben und Variableninhalte funktionieren genauso wie bei LOOP- und WHILE-Programmen.
- ▶ Addition und modifizierte Subtraktion funktionieren genauso wie bei LOOP- und WHILE-Programmen.
- ▶ Die Ausführung beginnt mit der Anweisung A_1 .
- ▶ Nach der Anweisung A_i wird die Anweisung A_{i+1} ausgeführt. (Falls $i = n$, ist die Ausführung beendet.)
- ▶ Ausnahmen zur vorigen Regel:
 - ▶ **HALT** beendet die Programmausführung.
 - ▶ Nach **GOTO** L_j geht die Ausführung mit Anweisung A_j weiter.
 - ▶ Nach **IF** $x_i = c$ **THEN GOTO** L_j geht die Ausführung mit A_j weiter, falls die Variable x_i aktuell den Wert c beinhaltet.

GOTO-berechenbare Funktionen

Definition (GOTO-berechenbar)

Eine Funktion $f : \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{N}_0$ heisst **GOTO-berechenbar**, wenn ein GOTO-Programm existiert, das sie berechnet.

GOTO-Berechenbarkeit vs. WHILE-Berechenbarkeit

Satz (GOTO-Berechenbarkeit vs. WHILE-Berechenbarkeit)

Jede GOTO-berechenbare Funktion ist WHILE-berechenbar.

Dabei reicht die Verwendung einer einzigen WHILE-Schleife aus.

(Die umgekehrte Aussage diskutieren wir später.)

GOTO-Berechenbarkeit vs. WHILE-Berechenbarkeit

Beweisskizze.

Wir konstruieren zu jedem GOTO-Programm ein äquivalentes WHILE-Programm mit nur einer WHILE-Schleife.

Ideen:

- ▶ Verwende eine frische Variable, um die nächste auszuführende Anweisung zu speichern.
 - ↔ Die Variable hat natürlich die Form x_i , aber zur Lesbarkeit schreiben wir sie **pc** für „program counter“.
- ▶ **GOTO** simuliert durch Zuweisung an pc .
- ▶ Hat pc den Wert 0, wird das Programm beendet.

...

GOTO-Berechenbarkeit vs. WHILE-Berechenbarkeit

Beweisskizze (Fortsetzung).

Sei $L_1 : A_1, L_2 : A_2, \dots, L_n : A_n$ das gegebene GOTO-Programm.

Grundstruktur des WHILE-Programms:

```

pc := 1;
WHILE pc ≠ 0 DO
  IF pc = 1 THEN (Übersetzung für A1) END;
  ...
  IF pc = n THEN (Übersetzung für An) END;
  IF pc = n + 1 THEN pc := 0 END
END
  
```

...

GOTO-Berechenbarkeit vs. WHILE-Berechenbarkeit

Beweisskizze (Fortsetzung).

Übersetzung der einzelnen Anweisungen:

- ▶ $x_i := x_j + c$
 $\rightsquigarrow x_i := x_j + c; pc := pc + 1$
- ▶ $x_i := x_j - c$
 $\rightsquigarrow x_i := x_j - c; pc := pc + 1$
- ▶ HALT
 $\rightsquigarrow pc := 0$
- ▶ GOTO L_j
 $\rightsquigarrow pc := j$
- ▶ IF $x_i = c$ THEN GOTO L_j
 $\rightsquigarrow pc := pc + 1; \text{ IF } x_i = c \text{ THEN } pc := j \text{ END}$

□

Nächster Zwischenstand

Wir wissen jetzt:

- ▶ WHILE-Programme sind echt mächtiger als LOOP-Programme.
- ▶ Deterministische Turingmaschinen sind mindestens so mächtig wie WHILE-Programme.
- ▶ WHILE-Programme sind mindestens so mächtig wie GOTO-Programme.

Wir zeigen nun, dass GOTO-Programme mindestens so mächtig sind wie DTMs und schliessen damit einen Kreis.

Turing-Berechenbarkeit vs. GOTO-Berechenbarkeit

Satz (Turing-Berechenbarkeit vs. GOTO-Berechenbarkeit)

Jede Turing-berechenbare numerische Funktion ist GOTO-berechenbar.

Beweis.

\rightsquigarrow Tafel.

□

Endstand

Folgerung

Sei $f : \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine partielle Funktion.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- ▶ f ist Turing-berechenbar.
- ▶ f ist WHILE-berechenbar.
- ▶ f ist GOTO-berechenbar.

Ferner gilt:

- ▶ Jede LOOP-berechenbare Funktion ist Turing-/WHILE-/GOTO-berechenbar.
- ▶ Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

13.5 Zusammenfassung

Zusammenfassung

- ▶ drei neue Berechnungsformalisten für numerische Funktionen:
 - ▶ LOOP-, WHILE-, GOTO-Programme
 - ▶ programmiersprachenähnlicher als Turingmaschinen
- ▶ grundlegender Ansatz zum Vergleich von Formalismen:
 - ▶ Wie kann man mit bestimmten Features andere Features **simulieren** (vgl. syntaktischer Zucker, minimalistische Formalismen)?
 - ▶ Wie kann man mit einem Formalismus den anderen Formalismus simulieren?

Zusammenfassung

Ergebnisse der Untersuchung:

- ▶ Turingmaschinen, WHILE- und GOTO-Programme sind **gleich mächtig**.
- ▶ LOOP-Programme sind **echt weniger mächtig**.
- ▶ Für letzteres Ergebnis bisher nur ein Trivialbeispiel (LOOP-berechenbare Funktionen sind immer total; dies gilt nicht für die anderen Formalismen).