

Theorie der Informatik

3. Aussagenlogik III

Malte Helmert Gabriele Röger

Universität Basel

26. Februar 2014

Was letztes Mal geschah

- **Logische Äquivalenz** erfasst, wann Formeln semantisch gleich sind.
- **Äquivalenzumformung** dient zur Vereinfachung von Formeln und zur Herstellung von Normalformen.
- Formel in **KNF** ist Konjunktion von Klauseln.
- Formel in **DNF** ist Disjunktion von Monomen.
- Jede Formel hat **äquivalente Formeln in DNF und in KNF**.

Formelmengen

Wissensbasis: Beispiel



Wenn nicht TrinktBier, dann IsstFisch.
Wenn IsstFisch und TrinktBier, dann
nicht IsstEiscreme.
Wenn IsstEiscreme oder nicht
TrinktBier, dann nicht IsstFisch.

$$\text{WB} = \{(\neg \text{TrinktBier} \rightarrow \text{IsstFisch}), \\ ((\text{IsstFisch} \wedge \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstEiscreme}), \\ ((\text{IsstEiscreme} \vee \neg \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstFisch})\}$$

Modelle für Formelmengen

Definition (Modell für Wissensbasis)

Sei WB eine **Wissensbasis** über A , d.h. eine Menge von aussagenlogischen Formeln über A .

Eine **Wahrheitsbelegung** \mathcal{I} für A ist ein **Modell für WB**, wenn \mathcal{I} ein **Modell für jede Formel** $\varphi \in \text{WB}$ ist.

Eigenschaften von Formelmengen

Eine Wissensbasis WB ist

- **erfüllbar**, falls WB mindestens ein Modell besitzt.
- **unerfüllbar**, falls WB nicht erfüllbar ist.
- **gültig** (oder **Tautologie**), falls jede Wahrheitsbelegung ein Modell für WB ist.
- **falsifizierbar**, falls WB keine Tautologie ist.

Beispiel I

Welche der Eigenschaften hat $WB = \{(A \wedge \neg B), \neg(B \vee A)\}$?

Beispiel I

Welche der Eigenschaften hat $WB = \{(A \wedge \neg B), \neg(B \vee A)\}$?

WB ist **unerfüllbar**:

Für jedes Modell \mathcal{I} mit $\mathcal{I} \models (A \wedge \neg B)$ gilt $\mathcal{I}(A) = 1$.

Damit gilt $\mathcal{I} \models (B \vee A)$ und daher nicht $\mathcal{I} \models \neg(B \vee A)$.

Beispiel I

Welche der Eigenschaften hat $WB = \{(A \wedge \neg B), \neg(B \vee A)\}$?

WB ist **unerfüllbar**:

Für jedes Modell \mathcal{I} mit $\mathcal{I} \models (A \wedge \neg B)$ gilt $\mathcal{I}(A) = 1$.

Damit gilt $\mathcal{I} \models (B \vee A)$ und daher nicht $\mathcal{I} \models \neg(B \vee A)$.

Daraus folgt direkt **falsifizierbar**, **nicht erfüllbar**, **keine Tautologie**.

Beispiel II

Welche der Eigenschaften hat

$$\text{WB} = \{(\neg \text{TrinktBier} \rightarrow \text{IsstFisch}), \\ ((\text{IsstFisch} \wedge \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstEiscreme}), \\ ((\text{IsstEiscreme} \vee \neg \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstFisch})\}?$$

Beispiel II

Welche der Eigenschaften hat

$$\begin{aligned} \text{WB} = \{ & (\neg \text{TrinktBier} \rightarrow \text{IsstFisch}), \\ & ((\text{IsstFisch} \wedge \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstEiscreme}), \\ & ((\text{IsstEiscreme} \vee \neg \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstFisch}) \} \end{aligned}?$$

- **erfüllbar**, z.B. mit $\mathcal{I} = \{\text{IsstFisch} \mapsto 1, \text{TrinktBier} \mapsto 1, \text{IsstEiscreme} \mapsto 0\}$
- damit **nicht unerfüllbar**
- **falsifizierbar**, z.B. mit $\mathcal{I} = \{\text{IsstFisch} \mapsto 0, \text{TrinktBier} \mapsto 0, \text{IsstEiscreme} \mapsto 1\}$
- damit **nicht gültig**

Fragen



Fragen?

Logische Folgerung

Logische Folgerung: Motivation

Worin besteht das Geheimnis Ihres langen Lebens?



Ich halte mich streng an Diätregeln: Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich immer Fisch. Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit habe, verzichte ich auf Eiscreme. Wenn ich Eiscreme habe oder Bier meide, dann rühre ich Fisch nicht an.

Behauptung: Die Frau trinkt Bier zu jeder Mahlzeit.

Wie können wir das folgern?

Logische Folgerung

Definition (Logische Konsequenz)

Sei WB eine Menge von Formeln und φ eine Formel.

Wir sagen, dass φ **logisch** aus WB **folgt** (auch: φ ist eine **logische Konsequenz** von WB , symbolisch $WB \models \varphi$), wenn **alle Modelle** für WB auch Modelle für φ sind.

Logische Folgerung

Definition (Logische Konsequenz)

Sei WB eine Menge von Formeln und φ eine Formel.

Wir sagen, dass φ **logisch** aus WB **folgt** (auch: φ ist eine **logische Konsequenz** von WB, symbolisch $WB \models \varphi$), wenn **alle Modelle** für WB auch Modelle für φ sind.

Achtung: Das Symbol \models ist „überladen“: $WB \models \varphi$ vs. $\mathcal{I} \models \varphi$.

Logische Folgerung

Definition (Logische Konsequenz)

Sei WB eine Menge von Formeln und φ eine Formel.

Wir sagen, dass φ **logisch** aus WB **folgt** (auch: φ ist eine **logische Konsequenz** von WB , symbolisch $WB \models \varphi$), wenn **alle Modelle** für WB auch Modelle für φ sind.

Achtung: Das Symbol \models ist „überladen“: $WB \models \varphi$ vs. $\mathcal{I} \models \varphi$.

Was ist, wenn WB unerfüllbar oder die leere Menge ist?

Logische Folgerung: Beispiel

Sei $\varphi = \text{TrinktBier}$ und

$$\text{WB} = \{(\neg \text{TrinktBier} \rightarrow \text{IsstFisch}), \\ ((\text{IsstFisch} \wedge \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstEiscreme}), \\ ((\text{IsstEiscreme} \vee \neg \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstFisch})\}.$$

Zeige: $\text{WB} \models \varphi$

Logische Folgerung: Beispiel

Sei $\varphi = \text{TrinktBier}$ und

$$\text{WB} = \{(\neg \text{TrinktBier} \rightarrow \text{IsstFisch}), \\ ((\text{IsstFisch} \wedge \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstEiscreme}), \\ ((\text{IsstEiscreme} \vee \neg \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstFisch})\}.$$

Zeige: $\text{WB} \models \varphi$

Beweis.

Beweis durch Widerspruch: Angenommen \mathcal{I} ist ein Modell von WB, aber $\mathcal{I} \not\models \text{TrinktBier}$. Dann gilt $\mathcal{I} \models \neg \text{TrinktBier}$. Da \mathcal{I} Modell von WB, gilt auch $\mathcal{I} \models (\neg \text{TrinktBier} \rightarrow \text{IsstFisch})$ und damit $\mathcal{I} \models \text{IsstFisch}$. Mit der analogen Argumentation erhalten wir über $\mathcal{I} \models ((\text{IsstEiscreme} \vee \neg \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstFisch})$ das Ergebnis $\mathcal{I} \models \neg \text{IsstFisch}$ und damit $\mathcal{I} \not\models \text{IsstFisch}$. \rightsquigarrow Widerspruch □

Wichtige Sätze zur logischen Folgerung

Theorem (Deduktionstheorem)

$WB \cup \{\varphi\} \models \psi$ gdw. $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$

Wichtige Sätze zur logischen Folgerung

Theorem (Deduktionstheorem)

$WB \cup \{\varphi\} \models \psi$ gdw. $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$

Theorem (Kontrapositionstheorem)

$WB \cup \{\varphi\} \models \neg\psi$ gdw. $WB \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$

Wichtige Sätze zur logischen Folgerung

Theorem (Deduktionstheorem)

$WB \cup \{\varphi\} \models \psi$ gdw. $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$

Theorem (Kontrapositionstheorem)

$WB \cup \{\varphi\} \models \neg\psi$ gdw. $WB \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$

Theorem (Widerlegungstheorem)

$WB \cup \{\varphi\}$ ist unerfüllbar gdw. $WB \models \neg\varphi$

Beweis des Deduktionstheorems

Deduktionstheorem: $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$ gdw. $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$

Beweis.

“ \Rightarrow ”: Voraussetzung ist, dass $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$.

Wir müssen zeigen, dass $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$, d.h. dass alle Modelle für WB die Formel $(\varphi \rightarrow \psi)$ erfüllen. Betrachte ein beliebiges Modell \mathcal{I} für WB . Wir unterscheiden zwei Fälle:

Beweis des Deduktionstheorems

Deduktionstheorem: $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$ gdw. $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$

Beweis.

“ \Rightarrow ”: Voraussetzung ist, dass $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$.

Wir müssen zeigen, dass $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$, d.h. dass alle Modelle für WB die Formel $(\varphi \rightarrow \psi)$ erfüllen. Betrachte ein beliebiges Modell \mathcal{I} für WB . Wir unterscheiden zwei Fälle:

- **Fall 1:** $\mathcal{I} \models \varphi$.

Dann ist \mathcal{I} ein Modell für $WB \cup \{\varphi\}$ und, wegen der Voraussetzung, $\mathcal{I} \models \psi$. Daraus können wir schliessen, dass $\mathcal{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)$.

Beweis des Deduktionstheorems

Deduktionstheorem: $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$ gdw. $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$

Beweis.

“ \Rightarrow ”: Voraussetzung ist, dass $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$.

Wir müssen zeigen, dass $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$, d.h. dass alle Modelle für WB die Formel $(\varphi \rightarrow \psi)$ erfüllen. Betrachte ein beliebiges Modell \mathcal{I} für WB . Wir unterscheiden zwei Fälle:

- **Fall 1:** $\mathcal{I} \models \varphi$.

Dann ist \mathcal{I} ein Modell für $WB \cup \{\varphi\}$ und, wegen der Voraussetzung, $\mathcal{I} \models \psi$. Daraus können wir schliessen, dass $\mathcal{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)$.

- **Fall 2:** $\mathcal{I} \not\models \varphi$.

Wir können direkt schliessen, dass $\mathcal{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)$.

...

...

Beweis des Deduktionstheorems

Deduktionstheorem: $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$ gdw. $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$

Beweis (Fortsetzung).

“ \Leftarrow ”: Voraussetzung ist, dass $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$.

Wir müssen zeigen, dass $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$, d.h., dass alle Modelle für $WB \cup \{\varphi\}$ die Formel ψ erfüllen. Betrachte ein beliebiges solches Modell \mathcal{I} für $WB \cup \{\varphi\}$.

Beweis des Deduktionstheorems

Deduktionstheorem: $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$ gdw. $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$

Beweis (Fortsetzung).

“ \Leftarrow ”: Voraussetzung ist, dass $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$.

Wir müssen zeigen, dass $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$, d.h., dass alle Modelle für $WB \cup \{\varphi\}$ die Formel ψ erfüllen. Betrachte ein beliebiges solches Modell \mathcal{I} für $WB \cup \{\varphi\}$.

Nach Definition gilt $\mathcal{I} \models \varphi$. Da \mathcal{I} ein Modell für WB ist, folgt mit der Voraussetzung, dass $\mathcal{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)$.

Beweis des Deduktionstheorems

Deduktionstheorem: $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$ gdw. $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$

Beweis (Fortsetzung).

“ \Leftarrow ”: Voraussetzung ist, dass $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$.

Wir müssen zeigen, dass $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$, d.h., dass alle Modelle für $WB \cup \{\varphi\}$ die Formel ψ erfüllen. Betrachte ein beliebiges solches Modell \mathcal{I} für $WB \cup \{\varphi\}$.

Nach Definition gilt $\mathcal{I} \models \varphi$. Da \mathcal{I} ein Modell für WB ist, folgt mit der Voraussetzung, dass $\mathcal{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)$.

Zusammen ergibt sich $\mathcal{I} \models (\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)) \equiv (\varphi \wedge \psi)$,
woraus folgt, dass $\mathcal{I} \models \psi$. □

Beweis des Kontrapositionstheorems

Kontrapositionstheorem: $WB \cup \{\varphi\} \models \neg\psi$ gdw. $WB \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$

Beweis.

Wegen des Deduktionstheorems gilt

$WB \cup \{\varphi\} \models \neg\psi$ gdw. $WB \models (\varphi \rightarrow \neg\psi)$.

Aus dem gleichen Grund gilt

$WB \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$ gdw. $WB \models (\psi \rightarrow \neg\varphi)$.

Beweis des Kontrapositionstheorems

Kontrapositionstheorem: $WB \cup \{\varphi\} \models \neg\psi$ gdw. $WB \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$

Beweis.

Wegen des Deduktionstheorems gilt

$WB \cup \{\varphi\} \models \neg\psi$ gdw. $WB \models (\varphi \rightarrow \neg\psi)$.

Aus dem gleichen Grund gilt

$WB \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$ gdw. $WB \models (\psi \rightarrow \neg\varphi)$.

Zudem gilt $(\varphi \rightarrow \neg\psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi) \equiv (\neg\psi \vee \neg\varphi) \equiv (\psi \rightarrow \neg\varphi)$.

Beweis des Kontrapositionstheorems

Kontrapositionstheorem: $WB \cup \{\varphi\} \models \neg\psi$ gdw. $WB \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$

Beweis.

Wegen des Deduktionstheorems gilt

$WB \cup \{\varphi\} \models \neg\psi$ gdw. $WB \models (\varphi \rightarrow \neg\psi)$.

Aus dem gleichen Grund gilt

$WB \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$ gdw. $WB \models (\psi \rightarrow \neg\varphi)$.

Zudem gilt $(\varphi \rightarrow \neg\psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi) \equiv (\neg\psi \vee \neg\varphi) \equiv (\psi \rightarrow \neg\varphi)$.

Zusammen ergibt sich wie gefordert

$WB \cup \{\varphi\} \models \neg\psi$

gdw. $WB \models (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

gdw. $WB \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$.



Beweis des Widerlegungstheorems

Übungsaufgabe

Fragen



Fragen?

Inferenz

Inferenz: Motivation

- Bisher: Beweise über **logische Folgerung** mit **semantischen Argumenten**

Inferenz: Motivation

- Bisher: Beweise über **logische Folgerung** mit **semantischen Argumenten**
- Kein allgemeiner Algorithmus

Inferenz: Motivation

- **Bisher:** Beweise über **logische Folgerung** mit **semantischen Argumenten**
- Kein allgemeiner Algorithmus
- **Lösung:** mit **syntaktischen Inferenzregeln** Formeln produzieren, die logisch aus gegebenen Formeln folgen

Inferenz: Motivation

- **Bisher:** Beweise über **logische Folgerung** mit **semantischen Argumenten**
- Kein allgemeiner Algorithmus
- **Lösung:** mit **syntaktischen Inferenzregeln** Formeln produzieren, die logisch aus gegebenen Formeln folgen
- **Vorteil:** **mechanische Arbeitsweise** einfach algorithmisch implementierbar

Inferenzregeln

- **Inferenzregeln** haben die Form

$$\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_k}{\psi}.$$

Inferenzregeln

- **Inferenzregeln** haben die Form

$$\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_k}{\psi}.$$

- Bedeutung: „Jedes Modell für $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ ist Modell für ψ .“

Inferenzregeln

- **Inferenzregeln** haben die Form

$$\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_k}{\psi}.$$

- Bedeutung: „Jedes Modell für $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ ist Modell für ψ .“
- Eine Inferenzregel mit $k = 0$ heisst **Axiom**.

Inferenzregeln

- **Inferenzregeln** haben die Form

$$\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_k}{\psi}.$$

- Bedeutung: „Jedes Modell für $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ ist Modell für ψ .“
- Eine Inferenzregel mit $k = 0$ heisst **Axiom**.
- Eine Menge von syntaktischen Inferenzregeln nennt man **Kalkül** oder **Beweissystem**.

Einige Inferenzregeln der Aussagenlogik

Modus ponens

$$\frac{\varphi, (\varphi \rightarrow \psi)}{\psi}$$

Einige Inferenzregeln der Aussagenlogik

Modus ponens

$$\frac{\varphi, (\varphi \rightarrow \psi)}{\psi}$$

Modus tollens

$$\frac{\neg\psi, (\varphi \rightarrow \psi)}{\neg\varphi}$$

Einige Inferenzregeln der Aussagenlogik

Modus ponens
$$\frac{\varphi, (\varphi \rightarrow \psi)}{\psi}$$

Modus tollens
$$\frac{\neg\psi, (\varphi \rightarrow \psi)}{\neg\varphi}$$

Und-Eliminierung
$$\frac{(\varphi \wedge \psi)}{\varphi} \quad \frac{(\varphi \wedge \psi)}{\psi}$$

Einige Inferenzregeln der Aussagenlogik

Modus ponens
$$\frac{\varphi, (\varphi \rightarrow \psi)}{\psi}$$

Modus tollens
$$\frac{\neg\psi, (\varphi \rightarrow \psi)}{\neg\varphi}$$

Und-Eliminierung
$$\frac{(\varphi \wedge \psi)}{\varphi} \quad \frac{(\varphi \wedge \psi)}{\psi}$$

Und-Einführung
$$\frac{\varphi, \psi}{(\varphi \wedge \psi)}$$

Einige Inferenzregeln der Aussagenlogik

Modus ponens
$$\frac{\varphi, (\varphi \rightarrow \psi)}{\psi}$$

Modus tollens
$$\frac{\neg\psi, (\varphi \rightarrow \psi)}{\neg\varphi}$$

Und-Eliminierung
$$\frac{(\varphi \wedge \psi)}{\varphi} \quad \frac{(\varphi \wedge \psi)}{\psi}$$

Und-Einführung
$$\frac{\varphi, \psi}{(\varphi \wedge \psi)}$$

Oder-Einführung
$$\frac{\varphi}{(\varphi \vee \psi)}$$

Einige Inferenzregeln der Aussagenlogik

Modus ponens
$$\frac{\varphi, (\varphi \rightarrow \psi)}{\psi}$$

Modus tollens
$$\frac{\neg\psi, (\varphi \rightarrow \psi)}{\neg\varphi}$$

Und-Eliminierung
$$\frac{(\varphi \wedge \psi)}{\varphi} \quad \frac{(\varphi \wedge \psi)}{\psi}$$

Und-Einführung
$$\frac{\varphi, \psi}{(\varphi \wedge \psi)}$$

Oder-Einführung
$$\frac{\varphi}{(\varphi \vee \psi)}$$

(\leftrightarrow)-Eliminierung
$$\frac{(\varphi \leftrightarrow \psi)}{(\varphi \rightarrow \psi)} \quad \frac{(\varphi \leftrightarrow \psi)}{(\psi \rightarrow \varphi)}$$

Ableitungen

Definition (Ableitung)

Eine **Ableitung** oder ein **Beweis** einer Formel φ aus einer Wissensbasis WB ist eine Sequenz von Formeln ψ_1, \dots, ψ_k für die gilt, dass

- $\psi_k = \varphi$ und
- für alle $i \in \{1, \dots, k\}$:
 - $\psi_i \in \text{WB}$, oder
 - ψ_i ist das Ergebnis der Anwendung einer Inferenzregel auf Elemente aus $\{\psi_1, \dots, \psi_{i-1}\}$.

Ableitung: Beispiel

Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow Q), (P \rightarrow R), ((Q \wedge R) \rightarrow S)\}$

Gesucht: Ableitung von $(S \wedge R)$ aus WB.

Ableitung: Beispiel

Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow Q), (P \rightarrow R), ((Q \wedge R) \rightarrow S)\}$

Gesucht: Ableitung von $(S \wedge R)$ aus WB.

① P (WB)

Ableitung: Beispiel

Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow Q), (P \rightarrow R), ((Q \wedge R) \rightarrow S)\}$

Gesucht: Ableitung von $(S \wedge R)$ aus WB.

- 1 P (WB)
- 2 $(P \rightarrow Q)$ (WB)

Ableitung: Beispiel

Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow Q), (P \rightarrow R), ((Q \wedge R) \rightarrow S)\}$

Gesucht: Ableitung von $(S \wedge R)$ aus WB.

- 1 P (WB)
- 2 $(P \rightarrow Q)$ (WB)
- 3 Q (1, 2, Modus ponens)

Ableitung: Beispiel

Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow Q), (P \rightarrow R), ((Q \wedge R) \rightarrow S)\}$

Gesucht: Ableitung von $(S \wedge R)$ aus WB.

- 1 P (WB)
- 2 $(P \rightarrow Q)$ (WB)
- 3 Q (1, 2, Modus ponens)
- 4 $(P \rightarrow R)$ (WB)

Ableitung: Beispiel

Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow Q), (P \rightarrow R), ((Q \wedge R) \rightarrow S)\}$

Gesucht: Ableitung von $(S \wedge R)$ aus WB.

- 1 P (WB)
- 2 $(P \rightarrow Q)$ (WB)
- 3 Q (1, 2, Modus ponens)
- 4 $(P \rightarrow R)$ (WB)
- 5 R (1, 4, Modus ponens)

Ableitung: Beispiel

Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow Q), (P \rightarrow R), ((Q \wedge R) \rightarrow S)\}$

Gesucht: Ableitung von $(S \wedge R)$ aus WB.

- 1 P (WB)
- 2 $(P \rightarrow Q)$ (WB)
- 3 Q (1, 2, Modus ponens)
- 4 $(P \rightarrow R)$ (WB)
- 5 R (1, 4, Modus ponens)
- 6 $(Q \wedge R)$ (3, 5, Und-Einführung)

Ableitung: Beispiel

Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow Q), (P \rightarrow R), ((Q \wedge R) \rightarrow S)\}$

Gesucht: Ableitung von $(S \wedge R)$ aus WB.

- 1 P (WB)
- 2 $(P \rightarrow Q)$ (WB)
- 3 Q (1, 2, Modus ponens)
- 4 $(P \rightarrow R)$ (WB)
- 5 R (1, 4, Modus ponens)
- 6 $(Q \wedge R)$ (3, 5, Und-Einführung)
- 7 $((Q \wedge R) \rightarrow S)$ (WB)

Ableitung: Beispiel

Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow Q), (P \rightarrow R), ((Q \wedge R) \rightarrow S)\}$

Gesucht: Ableitung von $(S \wedge R)$ aus WB.

- 1 P (WB)
- 2 $(P \rightarrow Q)$ (WB)
- 3 Q (1, 2, Modus ponens)
- 4 $(P \rightarrow R)$ (WB)
- 5 R (1, 4, Modus ponens)
- 6 $(Q \wedge R)$ (3, 5, Und-Einführung)
- 7 $((Q \wedge R) \rightarrow S)$ (WB)
- 8 S (6, 7, Modus ponens)

Ableitung: Beispiel

Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow Q), (P \rightarrow R), ((Q \wedge R) \rightarrow S)\}$

Gesucht: Ableitung von $(S \wedge R)$ aus WB.

- 1 P (WB)
- 2 $(P \rightarrow Q)$ (WB)
- 3 Q (1, 2, Modus ponens)
- 4 $(P \rightarrow R)$ (WB)
- 5 R (1, 4, Modus ponens)
- 6 $(Q \wedge R)$ (3, 5, Und-Einführung)
- 7 $((Q \wedge R) \rightarrow S)$ (WB)
- 8 S (6, 7, Modus ponens)
- 9 $(S \wedge R)$ (8, 5, Und-Einführung)

Korrektheit und Vollständigkeit

Definition (Korrektheit und Vollständigkeit eines Kalküls)

Wir schreiben $WB \vdash_K \varphi$, wenn es eine Ableitung von φ aus WB im Kalkül K gibt. (Falls der Kalkül K aus dem Kontext hervor geht, manchmal auch nur $WB \vdash \varphi$.)

Ein Kalkül K ist **korrekt**, wenn für alle WB und φ aus $WB \vdash_K \varphi$ folgt, dass $WB \models \varphi$.

Ein Kalkül K ist **vollständig**, wenn für all WB und φ aus $WB \models \varphi$ folgt, dass $WB \vdash_K \varphi$.

Korrektheit und Vollständigkeit

Definition (Korrektheit und Vollständigkeit eines Kalküls)

Wir schreiben $WB \vdash_K \varphi$, wenn es eine Ableitung von φ aus WB im Kalkül K gibt. (Falls der Kalkül K aus dem Kontext hervor geht, manchmal auch nur $WB \vdash \varphi$.)

Ein Kalkül K ist **korrekt**, wenn für alle WB und φ aus $WB \vdash_K \varphi$ folgt, dass $WB \models \varphi$.

Ein Kalkül K ist **vollständig**, wenn für all WB und φ aus $WB \models \varphi$ folgt, dass $WB \vdash_K \varphi$.

Betrachte den Kalkül K , der aus den vorhin gesehenen Ableitungsregeln besteht.

Frage: Ist K korrekt?

Frage: Ist K vollständig?

Widerlegungsvollständigkeit

- Offensichtlich wollen wir **korrekte** Kalküle
- Brauchen wir immer einen **vollständigen** Kalkül?

Widerlegungsvollständigkeit

- Offensichtlich wollen wir **korrekte** Kalküle
- Brauchen wir immer einen **vollständigen** Kalkül?
- **Widerlegungstheorem:**
WB $\cup \{\varphi\}$ ist unerfüllbar gdw. $WB \models \neg\varphi$
- Daraus folgt, dass $WB \models \varphi$ gdw. $WB \cup \{\neg\varphi\}$ ist unerfüllbar
- Wir können also das **allgemeine** Folgerungsproblem auf einen **Test auf Unerfüllbarkeit** reduzieren.

Widerlegungsvollständigkeit

- Offensichtlich wollen wir **korrekte** Kalküle
- Brauchen wir immer einen **vollständigen** Kalkül?
- **Widerlegungstheorem:**
WB $\cup \{\varphi\}$ ist unerfüllbar gdw. $WB \models \neg\varphi$
- Daraus folgt, dass $WB \models \varphi$ gdw. $WB \cup \{\neg\varphi\}$ ist unerfüllbar
- Wir können also das **allgemeine** Folgerungsproblem auf einen **Test auf Unerfüllbarkeit** reduzieren.
- Wir verwenden in Kalkülen das spezielle Symbol \square für (bewiesenermassen) unerfüllbare Formeln.

Widerlegungsvollständigkeit

- Offensichtlich wollen wir **korrekte** Kalküle
- Brauchen wir immer einen **vollständigen** Kalkül?
- **Widerlegungstheorem:**
WB $\cup \{\varphi\}$ ist unerfüllbar gdw. $WB \models \neg\varphi$
- Daraus folgt, dass $WB \models \varphi$ gdw. $WB \cup \{\neg\varphi\}$ ist unerfüllbar
- Wir können also das **allgemeine** Folgerungsproblem auf einen **Test auf Unerfüllbarkeit** reduzieren.
- Wir verwenden in Kalkülen das spezielle Symbol \square für (bewiesenermassen) unerfüllbare Formeln.

Definition (Widerlegungsvollständigkeit)

Ein Kalkül K ist **widerlegungsvollständig**, wenn für alle unerfüllbaren WB gilt, dass $WB \vdash_K \square$.

Fragen



Fragen?

Quiz



Resolutionskalkül

Resolution: Idee

- **Resolution** ist ein widerlegungsvollständiger Kalkül für Wissensbasen in **konjunktiver Normalform**.

Resolution: Idee

- **Resolution** ist ein widerlegungsvollständiger Kalkül für Wissensbasen in **konjunktiver Normalform**.
- Alle Wissensbasen können in äquivalente Formeln in KNF transformiert werden.
 - Transformation kann exponentielle Zeit benötigen.
 - Alternative: Effiziente Transformation in **erfüllbarkeitsäquivalente** Formeln (nicht Stoff dieser Vorlesung)

Resolution: Idee

- **Resolution** ist ein widerlegungsvollständiger Kalkül für Wissensbasen in **konjunktiver Normalform**.
- Alle Wissensbasen können in äquivalente Formeln in KNF transformiert werden.
 - Transformation kann exponentielle Zeit benötigen.
 - Alternative: Effiziente Transformation in **erfüllbarkeitsäquivalente** Formeln (nicht Stoff dieser Vorlesung)
- Zeige $WB \models \varphi$ durch Ableitbarkeit $WB \cup \{\neg\varphi\} \vdash_R \square$ mit **Resolutionskalkül R** .

Resolution: Idee

- **Resolution** ist ein widerlegungsvollständiger Kalkül für Wissensbasen in **konjunktiver Normalform**.
- Alle Wissensbasen können in äquivalente Formeln in KNF transformiert werden.
 - Transformation kann exponentielle Zeit benötigen.
 - Alternative: Effiziente Transformation in **erfüllbarkeitsäquivalente** Formeln (nicht Stoff dieser Vorlesung)
- Zeige $WB \models \varphi$ durch Ableitbarkeit $WB \cup \{\neg\varphi\} \vdash_R \square$ mit **Resolutionskalkül R** .
- Resolution kann exponentielle Zeit benötigen.
- Dies ist wahrscheinlich für **alle** widerlegungsvollständigen Beweismethoden der Fall. \rightsquigarrow **Komplexitätstheorie**

Wissensbasen als Klauselmengen

Vereinfachte Notation von Wissensbasen in KNF

- **Formel** in KNF als **Menge von Klauseln**
(wegen Kommutativität, Idempotenz, Assoziativität von \wedge)
- **Menge von Formeln** ebenfalls als **Menge von Klauseln**
- **Klausel** als **Menge von Literalen**
(wegen Kommutativität, Idempotenz, Assoziativität von \vee)
- Wissensbasis als **Menge von Mengen von Literalen**

Wissensbasen als Klauselmengen

Vereinfachte Notation von Wissensbasen in KNF

- **Formel** in KNF als **Menge von Klauseln**
(wegen Kommutativität, Idempotenz, Assoziativität von \wedge)
- **Menge von Formeln** ebenfalls als **Menge von Klauseln**
- **Klausel** als **Menge von Literalen**
(wegen Kommutativität, Idempotenz, Assoziativität von \vee)
- Wissensbasis als **Menge von Mengen von Literalen**

Beispiel

$$\text{WB} = \{(P \vee P), ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge R), \\ ((\neg Q \vee \neg R \vee S) \wedge P)\}$$

als Klauselmenge:

Wissensbasen als Klauselmengen

Vereinfachte Notation von Wissensbasen in KNF

- **Formel** in KNF als **Menge von Klauseln**
(wegen Kommutativität, Idempotenz, Assoziativität von \wedge)
- **Menge von Formeln** ebenfalls als **Menge von Klauseln**
- **Klausel** als **Menge von Literalen**
(wegen Kommutativität, Idempotenz, Assoziativität von \vee)
- Wissensbasis als **Menge von Mengen von Literalen**

Beispiel

$$\text{WB} = \{(P \vee P), ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge R), \\ ((\neg Q \vee \neg R \vee S) \wedge P)\}$$

als Klauselmenge:

$$\Delta = \{\{P\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg P, R\}, \{R\}, \{\neg Q, \neg R, S\}\}$$

Resolutionsregel

Der **Resolutionskalkül** besteht aus einer einzigen Regel, genannt **Resolutionsregel**:

$$\frac{K_1 \cup \{L\}, K_2 \cup \{\neg L\}}{K_1 \cup K_2},$$

wobei K_1 und K_2 (möglicherweise leere) Klauseln sind und L eine atomare Formel ist.

Resolutionsregel

Der **Resolutionskalkül** besteht aus einer einzigen Regel, genannt **Resolutionsregel**:

$$\frac{K_1 \cup \{L\}, K_2 \cup \{\neg L\}}{K_1 \cup K_2},$$

wobei K_1 und K_2 (möglicherweise leere) Klauseln sind und L eine atomare Formel ist.

Leiten wir die leere Klausel ab, schreiben wir \square statt $\{\}$.

Resolutionsregel

Der **Resolutionskalkül** besteht aus einer einzigen Regel, genannt **Resolutionsregel**:

$$\frac{K_1 \cup \{L\}, K_2 \cup \{\neg L\}}{K_1 \cup K_2},$$

wobei K_1 und K_2 (möglicherweise leere) Klauseln sind und L eine atomare Formel ist.

Leiten wir die leere Klausel ab, schreiben wir \square statt $\{\}$.

Terminologie:

- L und $\neg L$ sind die **Resolutionslitterale**,
- $K_1 \cup \{L\}$ and $K_2 \cup \{\neg L\}$ sind die **Elternklauseln** und
- $K_1 \cup K_2$ ist der **Resolvent**.

Resolutionsbeweis

Definition (Resolutionsbeweis)

Ein **Resolutionsbeweis** einer Klausel D aus einer Wissensbasis Δ ist eine Sequenz von Klauseln K_1, \dots, K_n mit

- $K_n = D$ und
- für alle $i \in \{1, \dots, n\}$:
 - $K_i \in \Delta$, oder
 - K_i ist Resolvent zweier Klauseln aus $\{K_1, \dots, K_{i-1}\}$.

Wenn es einen Resolutionsbeweis von D aus Δ gibt, sagen wir D kann **mit Resolution aus Δ abgeleitet** werden und schreiben $\Delta \vdash_R D$.

Anmerkung: Resolution ist ein **korrekter**, **widerlegungsvollständiger**, aber **unvollständiger** Kalkül.

Resolutionsbeweis: Beispiel

Resolutionsbeweis zum Testen einer logischen Folgerung: Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow (Q \wedge R))\}$.

Zeige per Resolution, dass $WB \models (R \vee S)$.

Resolutionsbeweis: Beispiel

Resolutionsbeweis zum Testen einer logischen Folgerung: Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow (Q \wedge R))\}$.

Zeige per Resolution, dass $WB \models (R \vee S)$.

Drei Schritte:

- 1 Reduziere logische Folgerung auf Unerfüllbarkeit.
- 2 Transformiere Wissensbasis in Klauselform (KNF).
- 3 Leite leere Klausel \square mit Resolution ab.

Resolutionsbeweis: Beispiel

Resolutionsbeweis zum Testen einer logischen Folgerung: Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow (Q \wedge R))\}$.

Zeige per Resolution, dass $WB \models (R \vee S)$.

Drei Schritte:

- 1 Reduziere logische Folgerung auf Unerfüllbarkeit.
- 2 Transformiere Wissensbasis in Klauselform (KNF).
- 3 Leite leere Klausel \square mit Resolution ab.

Schritt 1: Reduziere logische Folgerung auf Unerfüllbarkeit.

Resolutionsbeweis: Beispiel

Resolutionsbeweis zum Testen einer logischen Folgerung: Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow (Q \wedge R))\}$.

Zeige per Resolution, dass $WB \models (R \vee S)$.

Drei Schritte:

- 1 Reduziere logische Folgerung auf Unerfüllbarkeit.
- 2 Transformiere Wissensbasis in Klauselform (KNF).
- 3 Leite leere Klausel \square mit Resolution ab.

Schritt 1: Reduziere logische Folgerung auf Unerfüllbarkeit.

$WB \models (R \vee S)$ gdw $WB \cup \{\neg(R \vee S)\}$ ist unerfüllbar.

Betrachte daher

$WB' = WB \cup \{\neg(R \vee S)\} = \{P, (P \rightarrow (Q \wedge R)), \neg(R \vee S)\}$.

...

Resolutionsbeweis: Beispiel (Fortsetzung)

Resolution zum Testen einer logischen Folgerung: Beispiel (Forts.)

$WB' = \{P, (P \rightarrow (Q \wedge R)), \neg(R \vee S)\}$.

Schritt 2: Transformiere Wissensbasis in Klauselform (KNF).

Resolutionsbeweis: Beispiel (Fortsetzung)

Resolution zum Testen einer logischen Folgerung: Beispiel (Forts.)

$WB' = \{P, (P \rightarrow (Q \wedge R)), \neg(R \vee S)\}$.

Schritt 2: Transformiere Wissensbasis in Klauselform (KNF).

- P
 \rightsquigarrow Klauseln: $\{P\}$
- $P \rightarrow (Q \wedge R) \equiv (\neg P \vee (Q \wedge R)) \equiv ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R))$
 \rightsquigarrow Klauseln: $\{\neg P, Q\}, \{\neg P, R\}$
- $\neg(R \vee S) \equiv (\neg R \wedge \neg S)$
 \rightsquigarrow Klauseln: $\{\neg R\}, \{\neg S\}$

Resolutionsbeweis: Beispiel (Fortsetzung)

Resolution zum Testen einer logischen Folgerung: Beispiel (Forts.)

$WB' = \{P, (P \rightarrow (Q \wedge R)), \neg(R \vee S)\}$.

Schritt 2: Transformiere Wissensbasis in Klauselform (KNF).

- P
 \rightsquigarrow Klauseln: $\{P\}$
- $P \rightarrow (Q \wedge R) \equiv (\neg P \vee (Q \wedge R)) \equiv ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R))$
 \rightsquigarrow Klauseln: $\{\neg P, Q\}, \{\neg P, R\}$
- $\neg(R \vee S) \equiv (\neg R \wedge \neg S)$
 \rightsquigarrow Klauseln: $\{\neg R\}, \{\neg S\}$

$\Delta = \{\{P\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg P, R\}, \{\neg R\}, \{\neg S\}\}$

...

Resolutionsbeweis: Beispiel (Fortsetzung)

Resolution zum Testen einer logischen Folgerung: Beispiel (Forts.)

$$\Delta = \{\{P\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg P, R\}, \{\neg R\}, \{\neg S\}\}$$

Schritt 3: Leite leere Klausel \square mit Resolution ab.

- $K_1 = \{P\}$ (aus Δ)
- $K_2 = \{\neg P, Q\}$ (aus Δ)
- $K_3 = \{\neg P, R\}$ (aus Δ)
- $K_4 = \{\neg R\}$ (aus Δ)
- $K_5 = \{Q\}$ (aus K_1 und K_2)
- $K_6 = \{\neg P\}$ (aus K_3 und K_4)
- $K_7 = \square$ (aus K_1 und K_6)

Hinweis: Es gibt kürzere Beweise. (Zum Beispiel?)

Noch ein Beispiel

Noch ein Resolutionsbeispiel

Zeige mit Resolution, dass $WB \models \text{TrinktBier}$, wobei

$$WB = \{(\neg \text{TrinktBier} \rightarrow \text{IsstFisch}), \\ ((\text{IsstFisch} \wedge \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstEiscreme}), \\ ((\text{IsstEiscreme} \vee \neg \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstFisch})\}.$$

Grösseres Beispiel: Blutgruppen

Wir wissen folgendes:

- Ist Test T positiv, hat die Person Blutgruppe A oder AB.
- Ist Test S positiv, hat die Person Blutgruppe B oder AB.
- Hat eine Person Blutgruppe A, dann ist Test T positiv.
- Hat eine Person Blutgruppe B, dann ist Test S positiv.
- Hat eine Person Blutgruppe AB, sind beide Tests positiv.
- Jede Person hat genau eine der Blutgruppen A, B, AB, 0.
- Für eine gegebene Person ist Test T positiv und Test S negativ.

Zeigen Sie, dass die gegebene Person Blutgruppe A oder 0 hat.

Fragen



Fragen?

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- **Wissensbasis** ist Formelmenge, die gegebene Informationen beschreibt.
- **Logische Folgerung** $WB \models \varphi$ erlaubt auf Basis der Semantik zu schliessen, dass φ aus WB folgt.
- Ein korrekter **Kalkül** erlaubt solche Schlussfolgerungen auf Basis **rein syntaktischer Ableitungen** $WB \vdash \varphi$.
- **Vollständige Kalküle** meist nicht notwendig: Für viele Fragestellungen reicht **Widerlegungsvollständigkeit**.
- **Resolutionskalkül** ist **korrekt** und **widerlegungsvollständig**.

Weiterführende Themen

Es gibt noch viele Bereiche der Aussagenlogik, die wir in dieser Vorlesung nicht behandeln.

- **Resolutionsstrategien**, um Resolution in der Praxis so effizient wie möglich zu machen
- Andere Beweissysteme, wie zum Beispiel **Tableauxbeweise**
- Algorithmen zur **Modellkonstruktion**, zum Beispiel das Davis-Putnam-Logemann-Loveland-Verfahren (DPLL)