Theorie der Informatik (CS 206)

M. Helmert, G. Röger
Frühjahrssemester 2014

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 9

Abgabe: 30. April

Hinweis: Für Abgaben, die ausschliesslich mit LaTeX erstellt wurden, gibt es einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie nur die resultierende PDF-Datei bzw. einen Ausdruck davon ab.

Aufgabe 9.1 (Primitiv rekursive Funktionen, 1+1+1+1 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind, indem Sie angeben, wie sie sich mit dem primitiven Rekursionsschema und/oder Einsetzungsschema aus den Basisfunktionen oder bereits bekannten PRFs zusammensetzen lassen.

Sie dürfen hierbei verwenden, dass die anderen Beispiele auf der Folie „Primitiv rekursive Funktionen: Beispiele“ aus Vorlesungsabschnitt 14.3 PRFs sind. Bei dieser Aufgabe dürfen Sie Funktionen, die durch das Einsetzungsschema entstehen, ohne Beweis verwenden. Sie können also z.B. eine Funktionsdefinition der Art $h(x, y, z) = x + y + y + 2$ direkt verwenden, ohne zu zeigen, wie h durch Einsetzung aus den Basisfunktionen und der Additionsfunktion gewonnen werden kann.

(a) $\mathit{sub} : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ mit $\mathit{sub}(x, y) = \max(x - y, 0)$ für alle $x, y \in \mathbb{N}_0$

(b) $\mathit{binom}_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $\mathit{binom}_2(x) = \binom{x}{2}$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$

Sie dürfen hierbei ohne Beweis verwenden, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} i = \binom{n+1}{2}$

(c) $\mathit{fac} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $\mathit{fac}(x) = x!$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$

(d) $\mathit{pow} : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ mit $\mathit{pow}(x, y) = x^y$ für alle $x, y \in \mathbb{N}_0$

Aufgabe 9.2 (Einsetzungsschema, 3 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $\mathit{encode} : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ mit $\mathit{encode}(x, y) = \binom{x+y+1}{2} + x$ für alle $x, y \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, wie sich *encode* mit mehrfacher Verwendung des Einsetzungsschemas aus den Basisfunktionen sowie den Funktionen binom_2 und *add* gewinnen lässt. (Siehe die Folie „Primitiv rekursive Funktionen: Beispiele“ aus Vorlesungsabschnitt 14.3 für eine Definition dieser Funktionen.)

Verwenden Sie hierbei das Einsetzungsschema streng formal, so wie in den Beispielen in Vorlesungsabschnitt 14.2.

Aufgabe 9.3 (μ-Operator, 1+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $f(x) = \lceil \log_2(x + 1) \rceil$ μ-rekursiv ist.

(b) Sei $f : \mathbb{N}_0^3 \to \mathbb{N}_0$ eine Funktion, die durch ein WHILE-Programm P berechnet werden kann, das nur die Variablen $x_0, \dots, x_6$ verwendet.

Geben Sie ein WHILE-Programm an, das μf berechnet.

(Sie dürfen hierbei die abkürzenden Schreibweisen für LOOP- und WHILE-Programme aus der Vorlesung und früheren Übungen verwenden.)