Grundlagen der Künstlichen Intelligenz

23. Constraint-Satisfaction-Probleme: Pfadkonsistenz

Malte Helmert

Universität Basel

14. April 2014

Constraint-Satisfaction-Probleme: Überblick

Kapitelüberblick Constraint-Satisfaction-Probleme:

- 19.–20. Einführung
- 21.–23. Kernalgorithmen
  - 21. Backtracking
  - 22. Kantenkonsistenz
  - 23. Pfadkonsistenz
- 24.–25. Problemstruktur

Jenseits von Kantenkonsistenz

Jenseits von Kantenkonsistenz: Pfadkonsistenz

Grundidee der Kantenkonsistenz:

- zu jeder Belegung einer Variable u muss es eine passende Belegung jeder anderen Variable v geben
- ansonsten werden Werte von u, die nicht auf v erweiterbar sind, verboten

$\rightsquigarrow$ verschärfter unärer Constraint auf u

Idee lässt sich auf drei Variablen erweitern (Pfadkonsistenz):

- zu jeder gemeinsamen Belegung von Variablen u, v muss es eine passende Belegung jeder anderen Variablen w geben
- ansonsten werden Wertepaare für u und v, die nicht auf w erweiterbar sind, verboten

$\rightsquigarrow$ verschärfter binärer Constraint auf u und v

Jenseits von Kantenkonsistenz: i-Konsistenz

Generelles Konzept der i-Konsistenz für $i \geq 2$:

- zu jeder gemeinsamen Belegung von $v_1, \ldots, v_{i-1}$ muss es eine passende Belegung jeder anderen Variable v_i geben
- ansonsten werden Wertetupel für $v_1, \ldots, v_{i-1}$, die nicht auf v_i erweiterbar sind, verboten

$\rightsquigarrow$ verschärfter $(i-1)$-stelliger Constraint auf $v_1, \ldots, v_{i-1}$

- 2-Konsistenz = Kantenkonsistenz
- 3-Konsistenz = Pfadkonsistenz (*)

Wir betrachten allgemeine i-Konsistenz nicht näher, zumal höhere Werte als $i = 3$ selten verwendet werden und wir uns hier auf höchstens binäre Constraints beschränken.

(*) übliche Definitionen von 3-Konsistenz vs. Pfadkonsistenz unterscheiden sich, wenn ternäre (dreistellige) Constraints erlaubt sind

Pfadkonsistenz

Pfadkonsistenz: Definition

Definition (pfadkonsistent)

Sei $\mathcal{C} = \langle V, \text{dom}, (R_{uv}) \rangle$ ein Constraint-Netz.

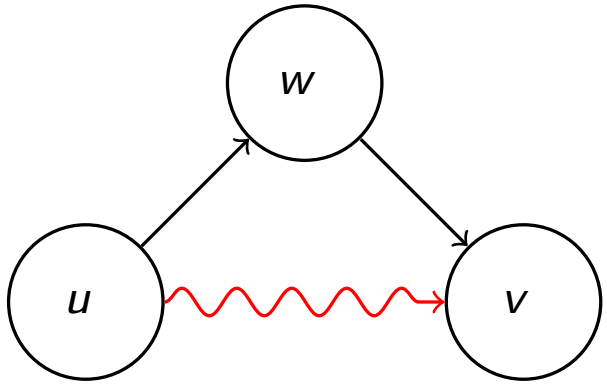
(a) Zwei verschiedene Variablen $u, v \in V$ sind pfadkonsistent in Bezug auf eine dritte Variable $w \in V$, wenn für beliebige Werte $d_u \in \text{dom}(u), d_v \in \text{dom}(v)$ mit $\langle u, v \rangle \in R_{uv}$ immer ein Wert $d_w \in \text{dom}(w)$ mit $\langle d_u, d_w \rangle \in R_{uw}$ und $\langle d_v, d_w \rangle \in R_{vw}$ existiert.

(b) Das Constraint-Netz $\mathcal{C}$ ist pfadkonsistent, wenn für drei verschiedene Variablen u, v, w immer gilt, dass u und v pfadkonsistent in Bezug auf w sind.

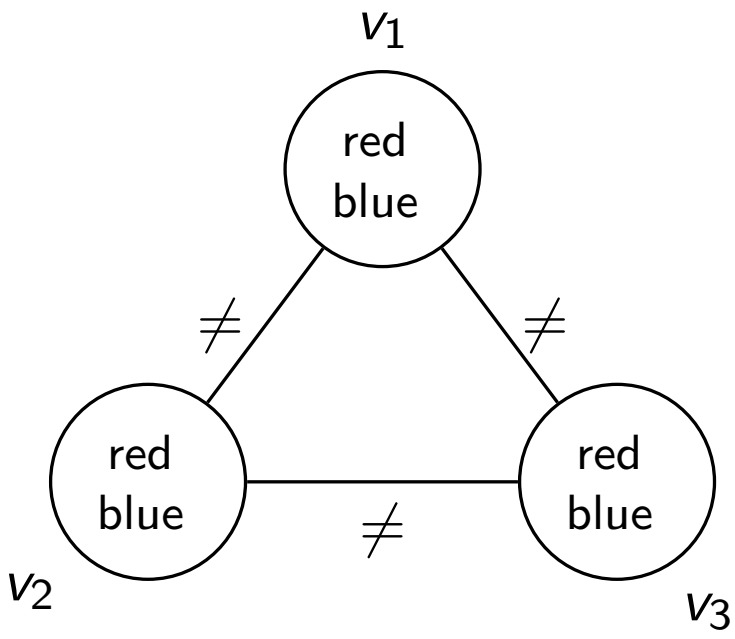
Pfadkonsistenz: Anmerkungen

Anmerkungen:

- Selbst wenn Constraint R_{uv} trivial ist, kann Pfadkonsistenz nichttriviale Constraints zwischen u und v inferieren.
- Wenn das Netz kantenkonsistent ist,
  kann Pfadkonsistenz nur dann zu neuer Information führen,
  wenn sowohl R_{uw} als auch R_{vw} nichttrivial sind.
- Name „Pfadkonsistenz“:
  Pfad $u \to w \to v$ führt zu neuer Information über $u \to v$



Pfadkonsistenz: Beispiel



kantenkonsistent, aber nicht pfadkonsistent

Verarbeitung eines Variablentripels: revise-3

Analog zu revise für Kantenkonsistenz:

function revise-3$(\mathcal{C}, u, v, w)$:

$\langle V, \mathrm{dom}, (R_{uv}) \rangle := \mathcal{C}$

for each $\langle d_u, d_v \rangle \in R_{uv}$:
  if there is no $d_w \in \mathrm{dom}(w)$ with
    $\langle d_u, d_w \rangle \in R_{uw}$ **and** $\langle d_v, d_w \rangle \in R_{vw}$:
      remove $\langle d_u, d_v \rangle$ from R_{uv}

Eingabe: Constraint-Netz $\mathcal{C}$ und drei Variablen u, v, w von $\mathcal{C}$

Effekt: Macht u, v pfadkonsistent in Bezug auf w.
Alle verletzenden Paare werden aus R_{uv} entfernt.

Zeitaufwand: $O(k^3)$, wenn k maximale Wertebereichsgrösse

Herstellen von Pfadkonsistenz: PC-2

Analog zu AC-3 für Kantenkonsistenz:

function PC-2($\mathcal{C}$):

$\langle V, \text{dom}, (R_{uv}) \rangle := \mathcal{C}$

$queue := \emptyset$

for each set of two variables $\{u, v\}$:

    for each $w \in V \setminus \{u, v\}$:

        insert $\langle u, v, w \rangle$ into $queue$

while $queue \neq \emptyset$:

    remove any element $\langle u, v, w \rangle$ from $queue$

    revise-3($\mathcal{C}, u, v, w$)

    if R_{uv} changed in the call to revise-3:

        for each $w' \in V \setminus \{u, v\}$:

            insert $\langle w', u, v \rangle$ into $queue$

            insert $\langle w', v, u \rangle$ into $queue$

PC-2: Diskussion

Die Aussagen zu AC-3 gelten analog.

- PC-2 stellt Pfadkonsistenz her
- Beweisidee: Invariante der **while**-Schleife:
  Wenn $\langle u, v, w \rangle \notin \mathit{queue}$, dann u, v pfadkonsistent in Bezug auf w
- mögliche Optimierung: $\langle u, v, w \rangle$ immer nur dann in *queue* einfügen, wenn R_{uw} und R_{vw} nichttrivial
- Laufzeit $O(n^3 k^5)$ für n Variablen und maximale Wertebereichsgrösse k (Warum?)

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Verallgemeinerung von
  Kantenkonsistenz (betrachtet Paare von Variablen)
  auf Pfadkonsistenz (betrachtet Tripel von Variablen)
  und i-Konsistenz (betrachtet i-Tupel von Variablen)
- Kantenkonsistenz verschärft unäre Constraints
- Pfadkonsistenz verschärft binäre Constraints
- i-Konsistenz verschärft $(i-1)$-stellige Constraints
- höhere Konsistenzstufen mächtiger,
  aber teurer als Kantenkonsistenz