Theorie der Informatik

M. Helmert
T. Keller
Frühjahrssemester 2017

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 11

Abgabe: Sonntag, 28. Mai 2017

Anmerkung: Für Abgaben, die ausschliesslich mit LaTeX erstellt wurden, gibt es einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie nur die resultierende PDF-Datei bzw. einen Ausdruck davon ab.

Aufgabe 11.1 (1.5+1.5+1 Punkte)
Betrachten Sie das Entscheidungsproblem CLIQUE:

- *Gegeben:* ungerichteter Graph $G = \langle V, E \rangle$, Zahl $K \in \mathbb{N}_0$
- *Gefragt:* Enthält G eine Clique der Grösse K, also eine Menge von Knoten $C \subseteq V$ mit $|C| \geq K$ und $\{u, v\} \in E$ für alle $u, v \in C$ mit $u \neq v$?

(a) Geben Sie einen nichtdeterministischen Algorithmus für CLIQUE an, dessen Laufzeit durch ein Polynom in $|V| + |E|$ beschränkt ist. Begründen Sie, warum die Laufzeit des Algorithmus polynomiell ist.

(b) Geben Sie einen deterministischen Algorithmus für CLIQUE an.

(c) Schätzen Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus aus Teil (b) in O-Notation ab.

Sie dürfen bei Ihrer Antwort beliebige übliche Programmierkonzepte verwenden. Es ist *nicht* nötig, dass Sie sich auf die eingeschränkte Syntax von WHILE-Programmen o.ä. beschränken. Es ist ausreichend high-level Pseudocode anzugeben, solange klar ist, dass jeder einzelne Schritt in polynomieller Zeit ausgeführt werden kann. Verwenden Sie die in der Vorlesung beschriebenen GUESS-Anweisungen für nichtdeterministische Anweisungen.

Aufgabe 11.2 (1+1+1.5+1.5 Punkte)
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Geben Sie in jedem Fall einen kurzen Beweis an (2–3 Sätze genügen).

(a) Sei X ein NP-hartes Problem und Y ein Problem, für das $X \leq_{\mathrm{p}} Y$ gilt. Dann ist Y NP-hart.

(b) Sei X ein NP-hartes Problem. Wenn für X ein deterministischer polynomieller Algorithmus existiert, dann existiert auch für DIRHAMILTONCYCLE ein deterministischer polynomieller Algorithmus.

(c) Es gibt NP-vollständige Probleme X und Y, so dass für X ein deterministischer polynomieller Algorithmus existiert, aber nicht für Y.

(d) Sei $Y \subseteq \Sigma^*$ ein beliebiges Problem mit $Y \neq \emptyset$ und $Y \neq \Sigma^*$. Für alle $X \in \mathrm{P}$ gilt $X \leq_{\mathrm{p}} Y$.

Aufgabe 11.3 (2+1 Punkte)
Ein *Hamiltonpfad* ist analog zu einem Hamiltonkreis definiert (vgl. Kapitel E1), nur dass ein einfacher Pfad statt einem Kreis gesucht ist. Genauer: ein Hamiltonpfad in einem gerichteten Graphen $\langle V, E \rangle$ ist eine Knotenfolge $\pi = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, die einen Pfad definiert ($\langle v_i, v_{i+1} \rangle \in E$ für alle $1 \leq i < n$) und jeden Knoten des Graphen genau einmal enthält.
Betrachten Sie das Entscheidungsproblem DIRHAMILTONPATH:

- *Gegeben:* gerichteter Graph $G = \langle V, E \rangle$

- *Gefragt:* Enthält G einen Hamiltonpfad?

(a) Beweisen Sie, dass DirHamiltonPath NP-hart ist. Sie dürfen dabei verwenden, dass das Problem DirHamiltonCycle NP-vollständig ist.

(b) Ist DirHamiltonPath NP-vollständig? Begründen Sie ihre Antwort.