Theorie der Informatik

M. Helmert
T. Keller
Frühjahrssemester 2017

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 9

Abgabe: Sonntag, 14. Mai 2017

Anmerkung: Für Abgaben, die ausschliesslich mit LaTeX erstellt wurden, gibt es einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie nur die resultierende PDF-Datei bzw. einen Ausdruck davon ab.

Aufgabe 9.1 (2 Punkte)

Beweisen Sie, dass die folgende Definition des Binomialkoeffizienten (über 2) korrekt ist, dass also $binom_2(x) = \frac{x \cdot (x-1)}{2}$ für alle $x \geq 2$ gilt. Geben Sie dabei auch Definitionen von h und $binom'_2$ in üblicher mathematischer Notation an.

$$\begin{aligned} h &= compose(add, \pi_1^3, \pi_2^3) \\ binom'_2 &= primitive\_recursion(null, h) \\ binom_2 &= compose(binom'_2, \pi_1^1, null) \end{aligned}$$

Aufgabe 9.2 (1+1+1 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Funktionen f jeweils eine Definition von μf in üblicher mathematischer Notation an.

(a) $f(x, y, z) = z \ominus y^x$ für alle $x, y, z \in \mathbb{N}_0$

(b) $f(x, y, z) = (y \ominus x) \cdot (z \ominus x)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{N}_0$

(c) $f(x, y, z) = (y \ominus x) + (z \ominus x)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{N}_0$

Aufgabe 9.3 (1+1+1 Punkte)

Sei $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$. Geben Sie totale und berechenbare Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \Sigma^*$ an, die die folgenden Sprachen rekursiv aufzählen.

(a) $L_1 = L_A \cup L_B$ wobei L_A und L_B Sprachen über Σ sind, die von den Funktionen f_A und f_B rekursiv aufgezählt werden.

(b) $L_2 = \{\mathtt{a}^x\mathtt{b}^y\mathtt{c}^z | x, y, z \in \mathbb{N}_0 \text{ und } x^2 + y^2 = z^2\}$

(c) $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \mathtt{a} \text{ kommt in } w \text{ genau einmal vor}\}$

Aufgabe 9.4 (1+1+1+1 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen über beliebige Sprachen A und B sind richtig, welche falsch? Geben Sie jeweils eine Beweisidee (1–2 Sätze) oder ein Gegenbeispiel an. Sie dürfen alle Ergebnisse der Vorlesung verwenden.

(a) Wenn A und B semi-entscheidbar sind, dann ist $A \cup B$ auch semi-entscheidbar.

(b) Wenn A und B semi-entscheidbar sind, dann ist folgender Algorithmus ein Semi-Entscheidungsverfahren für $A \cap B$:

```
IF χ'_A(w) = 1 AND χ'_B(w) = 1 THEN
  RETURN 1
ELSE
  LOOP FOREVER
END
```

(c) Jede entscheidbare Sprache wird von einer Turingmaschine akzeptiert.

(d) Jede Typ-0 Sprache ist entscheidbar.