Theorie der Informatik

M. Helmert
T. Keller
Frühjahrssemester 2017

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 1

Abgabe: Sonntag, 26. Februar 2017

Anmerkung: Für Abgaben, die ausschliesslich mit LaTeX erstellt wurden, gibt es einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie nur die resultierende PDF-Datei bzw. einen Ausdruck davon ab.

Hinweis: In diesem Übungsblatt sollen Sie das korrekte Formulieren von Beweisen üben. Ein formal korrekter Beweis besteht aus einzelnen Schritten, von denen jeder *unmittelbar* aus den Schritten davor oder den Vorraussetzungen hervorgeht (zum Beispiel wenn einen Wert durch seine Definition ersetzt wird). Schreiben Sie bitte die Beweise ausführlich und formal auf. Beispiele dafür finden Sie in den Vorlesungsfolien.

Aufgabe 1.1 (Direkter Beweis; 2 + 2 Punkte)

(a) Beweisen Sie mit einem direkten Beweis, dass für beliebige Mengen A, B und C gilt:

$$((A \cap B) \cap C) = (A \cap (B \cap C))$$

(b) Widerlegen sie, dass die folgende Aussage für beliebige Mengen A, B und C gilt, indem Sie ein *Gegenbeispiel* angeben (also Mengen A, B und C) und zeigen, dass es die Aussage nicht erfüllt.

$$((A \setminus B) \setminus C) = (A \setminus (B \setminus C))$$

Aufgabe 1.2 (Beweis durch Widerspruch; 3 Punkte)

Beweisen Sie mit einem Beweis durch Widerspruch, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: Wenn $n + 13$ eine Primzahl ist, dann ist n keine Primzahl.

Hinweis: 2 ist die einzige gerade Primzahl.

Aufgabe 1.3 (Strukturelle Induktion; 2 + 3 Punkte)

(a) Wir definieren zunächst induktiv eine einfache Teilmenge von mathematischen Ausdrücken, die nur die Zeichen „$\mathtt{N}$“, „$\mathtt{Z}$“, „$\oplus$“, „$\otimes$“, „$[\![$“ und „$]\!]$“ verwenden. Die Menge $\mathcal{E}$ der *einfachen Ausdrücke* ist induktiv wie folgt definiert:

- $\mathtt{N}$ und $\mathtt{Z}$ sind einfache Ausdrücke.
- Wenn x und y einfache Ausdrücke sind, dann ist auch $[\![x \otimes y]\!]$ ein einfacher Ausdruck.
- Wenn x und y einfache Ausdrücke sind, dann ist auch $[\![x \oplus y]\!]$ ein einfacher Ausdruck.

Beispiele für einfache Ausdrücke: $\mathtt{Z}$, $[\![\mathtt{Z} \otimes \mathtt{N}]\!]$, $[\![[\![\mathtt{Z} \otimes \mathtt{Z}]\!] \oplus [\![\mathtt{N} \oplus \mathtt{Z}]\!]]\!]$

Ausserdem definieren wir eine Funktion $f : \mathcal{E} \to \mathbb{N}_0$ als

- $f(\mathtt{N}) = 0$, $f(\mathtt{Z}) = 2$
- $f([\![x \otimes y]\!]) = f(x) \cdot f(y)$
- $f([\![x \oplus y]\!]) = f(x) + f(y)$

Also zum Beispiel: $f(\mathtt{Z}) = 2$, $f(⟦\mathtt{Z} \otimes \mathtt{N}⟧) = f(\mathtt{Z}) \cdot f(\mathtt{N}) = 2 \cdot 0 = 0$, $f(⟦⟦\mathtt{Z} \otimes \mathtt{Z}⟧ \oplus ⟦\mathtt{N} \oplus \mathtt{Z}⟧⟧) = 6$.

Beweisen Sie durch strukturelle Induktion, dass für jeden einfachen Ausdruck $x \in \mathcal{E}$ gilt, dass

$$f(x) \text{ ist gerade.}$$

(b) Wir definieren für die Binärbäume aus der Vorlesung zwei Funktionen $\textit{höhe} : \mathcal{B} \to \mathbb{N}_0$ und $\textit{blätter} : \mathcal{B} \to \mathbb{N}_0$, die jeden Binärbaum $B \in \mathcal{B}$ auf seine Höhe $\textit{höhe}(B)$ bzw. die Anzahl seiner Blätter $\textit{blätter}(B)$ abbilden:

- $\textit{höhe}(\square) = 1$
- $\textit{höhe}(\langle B_L, \bigcirc, B_R \rangle) = \max(\textit{höhe}(B_L), \textit{höhe}(B_R)) + 1$
- $\textit{blätter}(\square) = 1$
- $\textit{blätter}(\langle B_L, \bigcirc, B_R \rangle) = \textit{blätter}(B_L) + \textit{blätter}(B_R)$

Beweisen Sie durch strukturelle Induktion, dass für jeden Binärbaum $B \in \mathcal{B}$ gilt, dass

$$\textit{blätter}(B) \leq 2^{\textit{höhe}(B)-1}.$$