

# Theorie der Informatik

M. Helmert  
F. Pommerening  
Frühjahrssemester 2016

Universität Basel  
Fachbereich Informatik

## Übungsblatt 12

Abgabe: Mittwoch, 25. Mai 2016

*Anmerkung:* Für Abgaben, die ausschliesslich mit  $\text{\LaTeX}$  erstellt wurden, gibt es einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie nur die resultierende PDF-Datei bzw. einen Ausdruck davon ab.

### Aufgabe 12.1 (Leerheitsproblem, 2 Punkte)

Das *Leerheitsproblem* für allgemeine Grammatiken (d.h. Typ-0-Grammatiken) ist definiert als:

LEERHEIT: Gegeben eine allgemeine Grammatik  $G$ , ist  $\mathcal{L}(G) = \emptyset$ ?

Beweisen Sie, dass LEERHEIT unentscheidbar ist.

*Hinweise:* Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass man mit einer berechenbaren Funktion zu jeder gegebenen Typ-0-Grammatik  $G$  die Kodierung einer DTM  $M_G$  konstruieren kann, für die  $\mathcal{L}(M_G) = \mathcal{L}(G)$  gilt. Ausserdem kann man mit einer berechenbaren Funktion zu jeder gegebenen DTM  $M$  eine Typ-0-Grammatik  $G_M$  konstruieren, für die  $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(G_M)$  gilt.

Wenden Sie den Satz von Rice in geeigneter Weise an, um die Unentscheidbarkeit zu zeigen.

### Aufgabe 12.2 (Unentscheidbare Grammatik-Probleme, 1.5+1.5 Punkte)

Das *Äquivalenzproblem* und das *Schnittproblem* für allgemeine Grammatiken sind definiert als:

- ÄQUIVALENZ: Gegeben zwei allgemeine Grammatiken  $G_1$  und  $G_2$ , ist  $\mathcal{L}(G_1) = \mathcal{L}(G_2)$ ?
- SCHNITT: Gegeben zwei allgemeine Grammatiken  $G_1$  und  $G_2$ , gilt  $\mathcal{L}(G_1) \cap \mathcal{L}(G_2) = \emptyset$ ?

- (a) Beweisen Sie, dass ÄQUIVALENZ unentscheidbar ist, indem Sie LEERHEIT darauf reduzieren.
- (b) Beweisen Sie, dass SCHNITT unentscheidbar ist, indem Sie LEERHEIT darauf reduzieren.

*Hinweis:* Sie dürfen die Unentscheidbarkeit von LEERHEIT hier natürlich auch annehmen, wenn Sie Aufgabe 12.1 nicht gelöst haben.

### Aufgabe 12.3 (Satz von Rice, 1 Bonuspunkt)

Bei welchen der folgenden Sprachen zeigt der Satz von Rice, dass die Sprache unentscheidbar ist? Geben Sie für Sprachen, bei denen der Satz von Rice verwendet werden kann, jeweils die Teilmenge von Turing-berechenbaren Funktionen  $\mathcal{S}$  an, für die Sie den Satz anwenden.

*Hinweis:* Sie müssen keine Beweise angeben. Wenn der Satz von Rice anwendbar ist, geben Sie die Menge  $\mathcal{S}$  an. Andernfalls geben Sie eine kurze Begründung (1 Satz) an, warum der Satz von Rice nicht anwendbar ist.

- (a)  $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ berechnet die zweistellige Multiplikationsfunktion}\}$
- (b)  $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{Die Ausgabe von } M_w \text{ gestartet auf dem leeren Band enthält } 0101\}$
- (c)  $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält für mindestens eine Eingabe nach mehr als 10 Schritten mit einer gültigen Ausgabe}\}$
- (d)  $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ berechnet eine zweistellige Funktion über den natürlichen Zahlen}\}$