Theorie der Informatik

M. Helmert
F. Pommerening
Frühjahrssemester 2016

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 10

Abgabe: Mittwoch, 11. Mai 2016

Anmerkung: Für Abgaben, die ausschliesslich mit LaTeX erstellt wurden, gibt es einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie nur die resultierende PDF-Datei bzw. einen Ausdruck davon ab.

Aufgabe 10.1 (Potenzfunktion; 1 Punkt)

Beweisen Sie, dass die folgende Definition der Potenzfunktion korrekt ist, dass also $pow(x, y) = x^y$ für alle $x, y \in \mathbb{N}_0$ gilt (den Spezialfall 0^0 definieren wir für diese Aufgabe als $0^0 = 1$). Geben Sie dabei auch Definitionen von h und pow_{rev} in üblicher mathematischer Notation an.

$$\begin{aligned} h &= compose(mul, \pi_1^3, \pi_3^3) \\ pow_{rev} &= primitive\_recursion(one, h) \\ pow &= compose(pow_{rev}, \pi_2^2, \pi_1^2) \end{aligned}$$

Die Funktion $mul : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ ist die normale Multiplikationsfunktion: $mul(x, y) = x \cdot y$ für alle $x, y \in \mathbb{N}_0$ und die Funktion $one : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ die konstante Einsfunktion: $one(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 10.2 (Primitiv rekursive Funktionen; 4 Punkte)

Auf der Vorlesungsseite finden Sie ein Javaprogramm, mit dem Sie primitiv rekursive Funktionen definieren und auswerten können. Definieren Sie mit diesem Programm die folgenden Funktionen ohne den μ-Operator zu verwenden (Sie zeigen dadurch, dass es sich um primitiv rekursive Funktionen handelt). Demonstrieren Sie jeweils mit `print` die Korrektheit Ihrer Definition für einige Beispiele.
Hinweis: Sie können für Ihre Lösung alle in der Vorlesung definierten Funktionen verwenden. Diese sind in der Datei `lecture.def` enthalten. Fügen Sie ihre Definitionen am Ende dieser Datei unter der entsprechenden Markierung ein. Änderungen oberhalb der Markierung werden bei der Korrektur ignoriert.

(a) $add\_succ : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ mit $add\_succ(x, y) = x + y + 1$ für alle $x, y \in \mathbb{N}_0$.

(b) $binom_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $binom_2(x) = \binom{x}{2}$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$

Sie dürfen hierbei ohne Beweis verwenden, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} i = \binom{n+1}{2}$

(c) $encode : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ mit $encode(x, y) = \binom{x+y+1}{2} + x$ für alle $x, y \in \mathbb{N}_0$.

(d) $fac : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $fac(x) = x!$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 10.3 (μ-Operator; 3 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Funktionen f jeweils eine Definition von μf in üblicher mathematischer Notation an.

(a) $f(x, y) = y \ominus x^3$ für alle $x, y \in \mathbb{N}_0$

(b) $f(x, y) = (y^2 \ominus x) \cdot (10 \ominus x)$ für alle $x, y \in \mathbb{N}_0$

(c) $f(x, y) = |x - 2^y + 5|$ für alle $x, y \in \mathbb{N}_0$

Aufgabe 10.4 (μ-rekursive Funktionen; 2 Punkte)

Zeigen Sie mit dem Programm aus Aufgabe 10.2, dass die Funktion

$$\max : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0 \text{ mit } \max(x, y) = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq y \\ y & \text{sonst} \end{cases} \text{ für alle } x, y \in \mathbb{N}_0$$

μ-rekursiv ist. Sie dürfen dabei alle μ-rekursiven Funktionen aus der Vorlesung benutzen. Demonstrieren Sie mit `print` die Korrektheit Ihrer Definition für einige Beispiele.