

Theorie der Informatik

M. Helmert
F. Pommerening
Frühjahrssemester 2016

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 4

Abgabe: Mittwoch, 30. März 2016

Anmerkung: Für Abgaben, die ausschliesslich mit $\text{\LaTeX}$ erstellt wurden, gibt es einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie nur die resultierende PDF-Datei bzw. einen Ausdruck davon ab.

Aufgabe 4.1 (Freie und gebundene Variablen; 1 Punkt)

Betrachten Sie die Formel φ über einer Signatur mit den Prädikatsymbolen P (1-stellig), Q (2-stellig) und R (3-stellig), dem 1-stelligen Funktionssymbol f , dem Konstantensymbol c und den Variablensymbolen x, y und z .

$$\varphi = (P(z) \rightarrow (\forall x P(x) \wedge \exists y ((Q(x, y) \vee \forall y R(c, f(z), y)) \vee P(y))))$$

Markieren Sie alle Vorkommen von gebundenen Variablen in φ und geben Sie jeweils an, durch welchen Quantor die Variable gebunden ist.

Geben Sie *zusätzlich* die Menge der freien Variablen von φ an (ohne Beweis).

Aufgabe 4.2 (Logische Konsequenz in der Prädikatenlogik; 1+1+1 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen für prädikatenlogische Formeln φ und ψ .

- (a) $(\forall x \varphi \wedge \forall x \psi) \equiv \forall x (\varphi \wedge \psi)$
- (b) $\exists x (\varphi \wedge \psi) \models (\exists x \varphi \wedge \exists x \psi)$
- (c) $(\exists x \varphi \wedge \exists x \psi) \not\models \exists x (\varphi \wedge \psi)$

Aufgabe 4.3 (Eigenschaften von prädikatenlogischen Formeln; 1 Punkt + 1 Bonuspunkt)

Betrachten Sie die folgende Menge von prädikatenlogischen Formeln über einer Signatur mit dem zweistelligen Prädikatsymbol P und den Variablensymbolen x und y .

$$\Phi = \{\forall x \exists y P(x, y), \exists y \forall x \neg P(x, y)\}$$

Welche der Eigenschaften *erfüllbar*, *unerfüllbar*, *gültig*, und *falsifizierbar* hat Φ ? Begründen Sie Ihre Antwort für jede der vier Eigenschaften.

Bonuspunkt: Beweisen Sie ihre Antworten.

Hinweis: Ein formaler Beweis ist nur für den Bonuspunkt nötig. Wenn Sie den Beweis nicht formal machen wollen, reicht es jeweils, wenn Sie eine Grundmenge U und eine Interpretation von P (also $P^{\mathcal{I}}$) angeben und kurz begründen warum $\mathcal{I} \models \Phi$ oder $\mathcal{I} \not\models \Phi$ gilt.