Theorie der Informatik

M. Helmert
F. Pommerening
Frühjahrssemester 2016

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 1

Abgabe: Mittwoch, 2. März 2016

Anmerkung: Für Abgaben, die ausschliesslich mit LaTeX erstellt wurden, gibt es einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie nur die resultierende PDF-Datei bzw. einen Ausdruck davon ab.

Hinweis: In diesem Übungsblatt sollen Sie das korrekte Formulieren von Beweisen üben. Ein formal korrekter Beweis besteht aus einzelnen Schritten, von denen jeder *unmittelbar* aus den Schritten davor oder den Vorraussetzungen hervorgeht (zum Beispiel wenn einen Wert durch seine Definition ersetzt wird). Schreiben Sie bitte die Beweise ausführlich und formal auf. Beispiele dafür finden Sie in den Vorlesungsfolien.

Aufgabe 1.1 (Direkter Beweis; 1.5 + 1.5 Punkte)

(a) Beweisen Sie mit einem direkten Beweis, dass für beliebige Mengen A, B und C gilt:

$$((A \cap B) \cap C) = (A \cap (B \cap C))$$

(b) Widerlegen sie, dass die folgende Aussage für beliebige Mengen A, B und C gilt, indem Sie ein *Gegenbeispiel* angeben (also Mengen A, B und C) und zeigen, dass es die Aussage nicht erfüllt.

$$((A \setminus B) \setminus C) = (A \setminus (B \setminus C))$$

Aufgabe 1.2 (Beweis durch Widerspruch; 2 Punkte)

Beweisen Sie mit einem Beweis durch Widerspruch, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: Wenn $n + 7$ eine Primzahl ist, dann ist n keine Primzahl.

Hinweis: 2 ist die einzige gerade Primzahl.

Aufgabe 1.3 (Vollständige Induktion; 1 Punkt)

Wir wollen zeigen, dass alle Leoparden gleich schnell sind. In welcher Zeile des folgenden Induktionsbeweises ist ein Fehler? Was ist, formal gesehen, der Fehler?

1. Da wir die genaue Zahl von Leoparden nicht kennen, beweisen wir, dass für jede Menge von Leoparden alle Leoparden in der Menge gleich schnell sind.
2. Wir definieren die Eigenschaft $L(n)$: In einer beliebigen Menge von n Leoparden sind alle Leoparden gleich schnell.
3. Als Induktionsanfang zeigen wir $L(1)$.
4. In einer Menge mit nur einem Leoparden sind alle Leoparden gleich schnell, also gilt $L(1)$.
5. Als Induktionsvoraussetzung dürfen wir annehmen, dass $L(i)$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt.
6. Unter dieser Voraussetzung müssen wir im Induktionsschritt zeigen, dass $L(n+1)$ gilt.
7. Wir betrachten eine Menge von $n+1$ Leoparden $M = \{l_1, \dots, l_n, l_{n+1}\}$.
8. Die Menge $M_1 = M \setminus \{l_1\} = \{l_2, \dots, l_{n+1}\}$ (also M ohne den ersten Leoparden) enthält n Leoparden ($|M_1| = n$).
9. Für M_1 gilt nach Induktionsvoraussetzung $L(n)$ und wir folgern, dass alle Leoparden in M_1 gleich schnell sind.
10. Die Menge $M_2 = M \setminus \{l_{n+1}\} = \{l_1, \dots, l_n\}$ (also M ohne den letzten Leoparden) enthält n Leoparden ($|M_2| = n$).
11. Für M_2 gilt nach Induktionsvoraussetzung $L(n)$ und wir folgern, dass alle Leoparden in M_2 gleich schnell sind.
12. Wir betrachten einen Leoparden l_M, der in beiden Mengen ist, zum Beispiel $l_M = l_2$.
13. l_M ist gleich schnell wie alle Leoparden aus M_1 und wie alle Leoparden aus M_2.
14. Daher müssen alle Leoparden aus $M_1 \cup M_2 = M$ gleich schnell sein, d.h. wir haben für M die Aussage $L(n+1)$ gezeigt.
15. Da $L(1)$ gilt und unter der Annahme $L(n)$ auch $L(n+1)$ für $n \geq 1$ gilt, folgern wir, dass $L(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
16. Insbesondere gilt $L(n)$ für die Menge aller Leoparden, d.h. alle Leoparden sind gleich schnell.

Aufgabe 1.4 (Strukturelle Induktion; 2 + 2 Punkte)

(a) Wir definieren zunächst induktiv eine einfache Teilmenge von mathematischen Ausdrücken, die nur die Zeichen „N“, „Z“, „$\oplus$“, „$\otimes$“, „$[\![$“ und „$]\!]$“ verwenden. Die Menge $\mathcal{E}$ der *einfachen Ausdrücke* ist induktiv wie folgt definiert:

- N und Z sind einfache Ausdrücke.
- Wenn x und y einfache Ausdrücke sind, dann ist auch $[\![x \otimes y]\!]$ ein einfacher Ausdruck.
- Wenn x und y einfache Ausdrücke sind, dann ist auch $[\![x \oplus y]\!]$ ein einfacher Ausdruck.

Beispiele für einfache Ausdrücke: Z, $[\![\mathtt{Z} \otimes \mathtt{N}]\!]$, $[\![[\![\mathtt{Z} \otimes \mathtt{Z}]\!] \oplus [\![\mathtt{N} \oplus \mathtt{Z}]\!]]\!]$

Ausserdem definieren wir eine Funktion $f : \mathcal{E} \to \mathbb{N}_0$ als

- $f(\mathtt{N}) = 0$, $f(\mathtt{Z}) = 2$
- $f([\![x \otimes y]\!]) = f(x) \cdot f(y)$
- $f([\![x \oplus y]\!]) = f(x) + f(y)$

Also zum Beispiel: $f(\mathtt{Z}) = 2$, $f([\![\mathtt{Z} \otimes \mathtt{N}]\!]) = f(\mathtt{Z}) \cdot f(\mathtt{N}) = 2 \cdot 0 = 0$, $f([\![[\![\mathtt{Z} \otimes \mathtt{Z}]\!] \oplus [\![\mathtt{N} \oplus \mathtt{Z}]\!]]\!]) = 6$.

Beweisen Sie durch strukturelle Induktion, dass für jeden einfachen Ausdruck $x \in \mathcal{E}$ gilt, dass

$$f(x) \text{ ist gerade.}$$

(b) Wir definieren für die Binärbäume aus der Vorlesung zwei Funktionen *höhe* : $\mathcal{B} \to \mathbb{N}_0$ und *blätter* : $\mathcal{B} \to \mathbb{N}_0$, die jeden Binärbaum $B \in \mathcal{B}$ auf seine Höhe *höhe*(B) bzw. die Anzahl seiner Blätter *blätter*(B) abbilden:

- $\mathit{h\ddot{o}he}(\square) = 1$
- $\mathit{h\ddot{o}he}(\langle B_L, \bigcirc, B_R\rangle) = \max(\mathit{h\ddot{o}he}(B_L), \mathit{h\ddot{o}he}(B_R)) + 1$
- $\mathit{bl\ddot{a}tter}(\square) = 1$
- $\mathit{bl\ddot{a}tter}(\langle B_L, \bigcirc, B_R\rangle) = \mathit{bl\ddot{a}tter}(B_L) + \mathit{bl\ddot{a}tter}(B_R)$

Beweisen Sie durch strukturelle Induktion, dass für jeden Binärbaum $B \in \mathcal{B}$ gilt, dass

$$\mathit{bl\ddot{a}tter}(B) \leq 2^{\mathit{h\ddot{o}he}(B)-1}.$$