# Theorie der Informatik

## 21. Satz von Cook und Levin

Malte Helmert  Gabriele Röger

Universität Basel

18. Mai 2015

# Überblick: Vorlesung

## Vorlesungsteile

I. Logik ✓
II. Automatentheorie und formale Sprachen ✓
III. Berechenbarkeitstheorie ✓
IV. Komplexitätstheorie

# Überblick: Komplexitätstheorie

## IV. Komplexitätstheorie

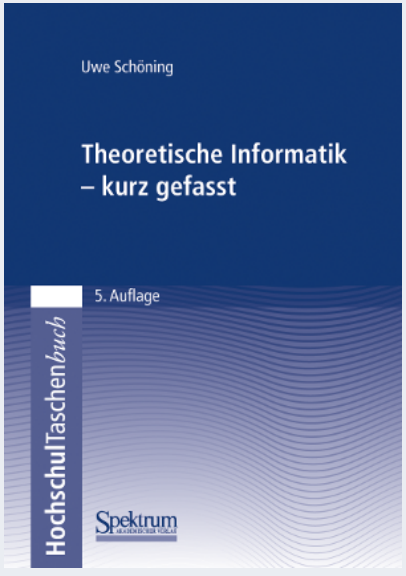
19. Motivation und Einführung ✓
20. P, NP und polynomielle Reduktionen ✓
21. Satz von Cook und Levin
22. einige NP-vollständige Probleme

# Nachlesen

## Literatur zu diesem Vorlesungskapitel

Theoretische Informatik - kurz gefasst
von Uwe Schöning (5. Auflage)

- Kapitel 3.2



# Satz von Cook und Levin

# SAT ist NP-vollständig

## Definition (SAT)

Das Problem SAT (Erfüllbarkeit = satisfiability)
ist wie folgt definiert:

Gegeben: eine aussagenlogische Formel $\varphi$

Frage: Ist $\varphi$ erfüllbar?

# SAT ist NP-vollständig

## Definition (SAT)

Das Problem SAT (Erfüllbarkeit = satisfiability)
ist wie folgt definiert:

Gegeben: eine aussagenlogische Formel $\varphi$

Frage: Ist $\varphi$ erfüllbar?

## Satz (Cook, 1971; Levin, 1973)

SAT *ist NP-vollständig.*

# SAT ist NP-vollständig

**Definition (SAT)**

Das Problem SAT (Erfüllbarkeit = satisfiability)
ist wie folgt definiert:

Gegeben: eine aussagenlogische Formel $\varphi$

Frage: Ist $\varphi$ erfüllbar?

**Satz (Cook, 1971; Levin, 1973)**

SAT *ist NP-vollständig.*

**Beweis.**

SAT $\in$ NP: Raten und prüfen.
SAT ist NP-hart: etwas komplizierter (wird fortgesetzt) ...

# NP-Härte von $\mathrm{SAT}$ (1)

**Beweis (Fortsetzung).**

Wir müssen zeigen: $A \leq_{\mathsf{p}} \mathrm{SAT}$ für alle $A \in \mathsf{NP}$.

# NP-Härte von $\mathrm{SAT}$ (1)

**Beweis (Fortsetzung).**

Wir müssen zeigen: $A \leq_{\mathsf{p}} \mathrm{SAT}$ für alle $A \in \mathsf{NP}$.

Sei $A$ ein beliebiges Problem in NP.

Wir müssen eine polynomielle Reduktion von $A$ auf $\mathrm{SAT}$ finden, also eine in polynomieller Zeit berechenbare Funktion $f$, so dass für jedes Eingabewort $w$ für $A$ gilt:

$w \in A$ gdw. $f(w)$ ist eine erfüllbare aussagenlogische Formel. ...

# NP-Härte von SAT (2)

**Beweis (Fortsetzung).**

Wegen $A \in \text{NP}$ gibt es eine NTM $M$ und ein Polynom $p$,
so dass $M$ das Problem $A$ in Zeit $p$ akzeptiert.

Idee: Konstruiere eine Formel, die die möglichen Konfigurationen
kodiert, die $M$ auf Eingabe $w$ in Zeit $p(|w|)$ durchlaufen kann,
und die genau dann erfüllbar ist,
wenn in dieser Zeit eine Endkonfiguration erreicht werden kann. ...

# NP-Härte von SAT (3)

## Beweis (Fortsetzung).

Sei $M = \langle Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E \rangle$ eine NTM für $A$
und sei $p$ ein Polynom, das die Laufzeit von $M$ beschränkt.

Sei $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ die Eingabe für $M$.

# NP-Härte von SAT (3)

## Beweis (Fortsetzung).

Sei $M = \langle Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E \rangle$ eine NTM für $A$
und sei $p$ ein Polynom, das die Laufzeit von $M$ beschränkt.

Sei $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ die Eingabe für $M$.

Nummerieren wir die Bandpositionen mit ganzen Zahlen (positiv und negativ), so dass der TM-Kopf zu Beginn auf Position 1 steht.

# NP-Härte von SAT (3)

## Beweis (Fortsetzung).

Sei $M = \langle Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E \rangle$ eine NTM für $A$
und sei $p$ ein Polynom, das die Laufzeit von $M$ beschränkt.

Sei $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ die Eingabe für $M$.

Nummerieren wir die Bandpositionen mit ganzen Zahlen (positiv und negativ), so dass der TM-Kopf zu Beginn auf Position 1 steht.

Beobachtung: innert $p(n)$ vielen Berechnungsschritten kann der TM-Kopf nur Positionen aus der Menge
$Pos = \{-p(n)+1, -p(n)+2, \dots, -1, 0, 1, \dots, p(n)+1\}$ erreichen.

# NP-Härte von SAT (3)

## Beweis (Fortsetzung).

Sei $M = \langle Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E \rangle$ eine NTM für $A$
und sei $p$ ein Polynom, das die Laufzeit von $M$ beschränkt.

Sei $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ die Eingabe für $M$.

Nummerieren wir die Bandpositionen mit ganzen Zahlen (positiv und negativ), so dass der TM-Kopf zu Beginn auf Position 1 steht.

Beobachtung: innert $p(n)$ vielen Berechnungsschritten kann der TM-Kopf nur Positionen aus der Menge
$Pos = \{-p(n)+1, -p(n)+2, \dots, -1, 0, 1, \dots, p(n)+1\}$ erreichen.

Statt unendlich vieler Bandpositionen müssen wir nur diese (polynomiell vielen!) Positionen berücksichtigen. ...

# NP-Härte von SAT (4)

## Beweis (Fortsetzung).

Wir können Konfigurationen von $M$ kodieren, indem wir angeben:

- was der aktuelle Zustand von $M$ ist
- auf welche Zelle in *Pos* der TM-Kopf zeigt
- welche Symbole aus $\Gamma$ das Band auf den Positionen in *Pos* beinhaltet

$\rightsquigarrow$ durch Aussagevariablen kodierbar

# NP-Härte von SAT (4)

## Beweis (Fortsetzung).

Wir können Konfigurationen von $M$ kodieren, indem wir angeben:

- was der aktuelle Zustand von $M$ ist
- auf welche Zelle in *Pos* der TM-Kopf zeigt
- welche Symbole aus $\Gamma$ das Band auf den Positionen in *Pos* beinhaltet

$\rightsquigarrow$ durch Aussagevariablen kodierbar

Um nicht nur eine Konfiguration, sondern eine Berechnung zu kodieren, benötigen wir eine Kopie dieser Variablen für jeden Schritt der Berechnung.

# NP-Härte von SAT (4)

## Beweis (Fortsetzung).

Wir können Konfigurationen von $M$ kodieren, indem wir angeben:

- was der aktuelle Zustand von $M$ ist
- auf welche Zelle in *Pos* der TM-Kopf zeigt
- welche Symbole aus $\Gamma$ das Band auf den Positionen in *Pos* beinhaltet

$\rightsquigarrow$ durch Aussagevariablen kodierbar

Um nicht nur eine Konfiguration, sondern eine Berechnung zu kodieren, benötigen wir eine Kopie dieser Variablen für jeden Schritt der Berechnung.

Wir müssen dabei nur die Berechnungsschritte $\mathit{Steps} = \{0, 1, \ldots, p(n)\}$ berücksichtigen, denn $M$ soll innert $p(n)$ Schritten akzeptieren. ...

# NP-Härte von SAT (5)

## Beweis (Fortsetzung).

Verwende die folgenden Aussagevariablen in der Formel $f(w)$:

- $state_{t,z}$ ($t \in Steps$, $z \in Z$)
  $\rightsquigarrow$ kodiert Zustand der NTM in der $t$-ten Konfiguration
- $head_{t,i}$ ($t \in Steps$, $i \in Pos$)
  $\rightsquigarrow$ kodiert Kopfposition in der $t$-ten Konfiguration
- $tape_{t,i,a}$ ($t \in Steps$, $i \in Pos$, $a \in \Gamma$)
  $\rightsquigarrow$ kodiert Bandinhalt in der $t$-ten Konfiguration

Konstruiere $f(w)$ so, dass jede erfüllende Belegung

- eine Folge von Konfigurationen der TM beschreibt,
- die mit der Startkonfiguration beginnt,
- eine akzeptierende Konfiguration erreicht
- und den TM-Regeln in $\delta$ folgt

...

# NP-Härte von SAT (6)

## Beweis (Fortsetzung).

Kleiner Trick: Modifiziere $M$ so, dass sie in jedem Zustand die Möglichkeit hat, nichts zu tun.

- Füge $\delta$ Transitionen der Form $\langle\langle z, a\rangle, \langle z, a, \mathrm{N}\rangle\rangle$ für jedes $z$ und $a$ hinzu.
- Ändert das Akzeptanz-Verhalten von $M$ nicht und erlaubt uns anzunehmen, dass eine akzeptierende Berechnung genau $p(n)$ Schritte braucht statt höchstens $p(n)$ Schritte.
- Das macht uns im Folgenden das Leben etwas leichter.

...

# NP-Härte von SAT (7)

## Beweis (Fortsetzung).

Hilfsformel:

$$\mathit{oneof}\ X := \left(\bigvee_{x \in X} x\right) \wedge \neg \left(\bigvee_{x \in X} \bigvee_{y \in X \setminus \{x\}} (x \wedge y)\right)$$

1. Beschreibe Folge von Konfigurationen der TM:

$$\mathit{Valid} := \bigwedge_{t \in \mathit{Steps}} \Big( \mathit{oneof}\,\{\mathit{state}_{t,z} \mid z \in Z\} \wedge \mathit{oneof}\,\{\mathit{head}_{t,i} \mid i \in \mathit{Pos}\} \wedge \bigwedge_{i \in \mathit{Pos}} \mathit{oneof}\,\{\mathit{tape}_{t,i,a} \mid a \in \Gamma\} \Big)$$

...

# NP-Härte von SAT (8)

**Beweis (Fortsetzung).**

## 2. Beginne in Startkonfiguration

$$\mathit{Init} := \mathit{state}_{0,z_0} \wedge \mathrm{head}_{0,1} \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \mathit{tape}_{0,i,w_i} \wedge \bigwedge_{i \in \mathit{Pos} \setminus \{1,\ldots,n\}} \mathit{tape}_{0,i,\square}$$

...

# NP-Härte von SAT (9)

**Beweis (Fortsetzung).**

3. Erreiche eine akzeptierende Konfiguration

$$Accept := \bigvee_{q_e \in E} state_{p(n),q_e}$$

...

# NP-Härte von SAT (10)

**Beweis (Fortsetzung).**

4. Folge den Regeln in $\delta$:

$$Trans := \bigwedge_{t \in Steps} \left( \bigvee_{q_e \in E} state_{t,q_e} \vee \bigvee_{R \in \delta} Rule_{t,R} \right)$$

wobei. . . . . .

# NP-Härte von SAT (11)

## Beweis (Fortsetzung).

### 4. Folge den Regeln in $\delta$ (Fortsetzung):

$$Rule_{t,\langle\langle z,a\rangle,\langle z',a',y\rangle\rangle} :=$$
$$state_{t,z} \wedge state_{t+1,z'} \wedge$$
$$\bigwedge_{i \in Pos} \left(head_{t,i} \rightarrow tape_{t,i,a} \wedge head_{t+1,i+y} \wedge tape_{t+1,i,a'}\right) \wedge$$
$$\bigwedge_{i \in Pos} \bigwedge_{a'' \in \Gamma} \left(\neg head_{t,i} \wedge tape_{t,i,a''} \rightarrow tape_{t+1,i,a''}\right)$$

(Spezialfall: *tape*- und *head*-Variablen, bei denen der Bandindex $i + y$ ausserhalb von *Pos* liegt, durch $\perp$ ersetzen; ebenso Variablen, bei denen der Zeitindex ausserhalb von *Steps* liegt.) ...

# NP-Härte von SAT (12)

## Beweis (Fortsetzung).

### Alles zusammengesetzt:

Setze $f(w) := \mathit{Valid} \wedge \mathit{Init} \wedge \mathit{Accept} \wedge \mathit{Trans}$.

# NP-Härte von SAT (12)

## Beweis (Fortsetzung).

### Alles zusammengesetzt:

Setze $f(w) := \mathit{Valid} \wedge \mathit{Init} \wedge \mathit{Accept} \wedge \mathit{Trans}$.

- $f(w)$ kann in polynomieller Zeit in $|w|$ konstruiert werden.
- $w \in A$ gdw. $M$ akzeptiert $w$ in $p(|w|)$ Schritten
  gdw. $f(w)$ ist erfüllbar
  gdw. $f(w) \in \mathrm{SAT}$

$\rightsquigarrow$ $A \leq_{\mathrm{p}} \mathrm{SAT}$

# NP-Härte von SAT (12)

## Beweis (Fortsetzung).

### Alles zusammengesetzt:

Setze $f(w) := \mathit{Valid} \wedge \mathit{Init} \wedge \mathit{Accept} \wedge \mathit{Trans}$.

- $f(w)$ kann in polynomieller Zeit in $|w|$ konstruiert werden.
- $w \in A$ gdw. $M$ akzeptiert $w$ in $p(|w|)$ Schritten
  gdw. $f(w)$ ist erfüllbar
  gdw. $f(w) \in \mathrm{SAT}$

$\rightsquigarrow$ $A \leq_{\mathrm{p}} \mathrm{SAT}$

Da $A \in \mathrm{NP}$ beliebig war, gilt dies für jedes $A \in \mathrm{NP}$.

# NP-Härte von SAT (12)

## Beweis (Fortsetzung).

### Alles zusammengesetzt:

Setze $f(w) := \mathit{Valid} \wedge \mathit{Init} \wedge \mathit{Accept} \wedge \mathit{Trans}$.

- $f(w)$ kann in polynomieller Zeit in $|w|$ konstruiert werden.
- $w \in A$ gdw. $M$ akzeptiert $w$ in $p(|w|)$ Schritten
  gdw. $f(w)$ ist erfüllbar
  gdw. $f(w) \in \mathrm{SAT}$

$\rightsquigarrow$ $A \leq_{\mathrm{p}} \mathrm{SAT}$

Da $A \in \mathrm{NP}$ beliebig war, gilt dies für jedes $A \in \mathrm{NP}$.
Folglich ist SAT NP-hart und damit auch NP-vollständig. □

# Zusammenfassung

# Zusammenfassung

- Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik (SAT) ist NP-vollständig.
- Beweisidee für die NP-Härte:
  - Jedes Problem in NP kann durch eine NTM in polynomieller Zeit $p(|w|)$ bei Eingabe $w$ gelöst werden.
  - Stelle zu Wort $w$ eine aussagenlogische Formel $\varphi$ auf, die die Berechnungsschritte der NTM auf Eingabe $w$ kodiert.
  - Konstruiere $\varphi$ so, dass es genau dann erfüllt werden kann, wenn es eine akzeptierende Berechnung der Länge $p(|w|)$ gibt.