Theorie der Informatik

13. Turing-Berechenbarkeit

Malte Helmert Gabriele Röger

Universität Basel

13. April 2015

Theorie der Informatik

13. April 2015 — 13. Turing-Berechenbarkeit

Überblick: Vorlesung

Vorlesungsteile

I. Logik ✓
II. Automatentheorie und formale Sprachen ✓
III. Berechenbarkeitstheorie
IV. Komplexitätstheorie

Leitfrage

Leitfrage in diesem Vorlesungsteil:

Was können Computer berechnen?

Überblick: Berechenbarkeitstheorie

III. Berechenbarkeitstheorie

13. Turing-Berechenbarkeit
14. LOOP-, WHILE- und GOTO-Berechenbarkeit
15. primitive Rekursion und μ-Rekursion
16. Ackermannfunktion
17. Entscheidbarkeit, Reduktionen, Halteproblem
18. Postsches Korrespondenzproblem

    ~~Unentscheidbare Grammatik-Probleme~~

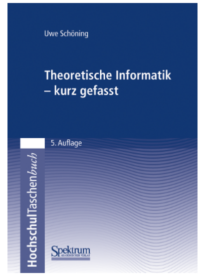
    ~~Gödelscher Satz und diophantische Gleichungen~~

Nachlesen

Literatur zu diesem Vorlesungskapitel

Theoretische Informatik - kurz gefasst
von Uwe Schöning (5. Auflage)

- Kapitel 2.1
- Kapitel 2.2



13.1 Berechnungen

Berechnung

Was ist eine Berechnung?

- intuitives Berechenbarkeitsmodell (Papier und Bleistift)
- vs. Berechnung auf physikalischen Computern
- vs. formale mathematische Modelle

Wir untersuchen in den folgenden Kapiteln
Berechnungsmodelle für partielle Funktionen $f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$.

- keine echte Einschränkung: beliebige Informationen können als Zahlen kodiert werden

Formale Berechnungsmodelle

Formale Berechnungsmodelle

- Turingmaschinen
- LOOP-, WHILE-, GOTO-Programme
- primitiv rekursive Funktionen, μ-rekursive Funktionen

In den nächsten Vorlesungen werden wir

- diese Berechnungsmodelle kennen lernen und
- hinsichtlich ihrer Mächtigkeit miteinander vergleichen.

Church-Turing-These

Church-Turing-These

Alle im intuitiven Sinne berechenbaren Funktionen können mit Turingmaschinen berechnet werden.

- kann man nicht beweisen (Warum nicht?)
- aber wir werden Evidenz dafür sammeln

13.2 Wiederholung: Turingmaschinen

Formale Berechnungsmodelle

Formale Berechnungsmodelle: Turingmaschinen

- Turingmaschinen
- LOOP-, WHILE-, GOTO-Programme
- primitiv rekursive Funktionen, μ-rekursive Funktionen

Wiederholung: deterministische Turingmaschine (DTM)

Definition (Deterministische Turingmaschine)

Eine deterministische Turingmaschine (DTM) ist gegeben durch ein 7-Tupel $M = \langle Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, E \rangle$ mit:

- Z endliche, nicht-leere Menge von Zuständen
- $\Sigma \neq \emptyset$ endliches Eingabealphabet
- $\Gamma \supset \Sigma$ endliches Bandalphabet
- $\delta : (Z \setminus E) \times \Gamma \to Z \times \Gamma \times \{\mathrm{L}, \mathrm{R}, \mathrm{N}\}$ Übergangsfunktion
- $z_0 \in Z$ Startzustand
- $\Box \in \Gamma \setminus \Sigma$ Blank-Zeichen
- $E \subseteq Z$ Endzustände

Wiederholung: Konfigurationen und Berechnungsschritte

Wie arbeiten Turingmaschinen?

- Konfiguration: $\alpha z \beta$ mit $\alpha \in \Gamma^*$, $z \in Z$, $\beta \in \Gamma^+$
- ein Rechenschritt: $c \vdash c'$, wenn aus Konfiguration c in einem Berechnungsschritt Konfiguration c' entsteht
- mehrere Rechenschritte: $c \vdash^* c'$, wenn aus Konfiguration c in 0 oder mehr Schritten Konfiguration c' entsteht ($c = c_0 \vdash c_1 \vdash c_2 \vdash \cdots \vdash c_{n-1} \vdash c_n = c'$, $n \geq 0$)

(Definition von $\vdash$, also wie ein Berechnungsschritt die aktuelle Konfiguration ändert, wird hier nicht wiederholt. ⇝ Kapitel 12.)

13.3 Turing-berechenbare Funktionen

Berechnung von Funktionen?

Wie kann eine DTM eine Funktion berechnen?

- "Eingabe" x ist anfänglicher Bandinhalt
- "Ausgabe" $f(x)$ ist Bandinhalt (ohne Blanks am Rand) beim Erreichen eines Endzustands
- Hält die TM für die gegebene Eingabe nicht an, ist $f(x)$ an dieser Stelle undefiniert.

Was für Funktionen werden so berechnet?

- zunächst einmal Funktionen von Wörtern: $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$
- Interpretation als Funktionen von Zahlen $f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$: kodiere Zahlen als Wörter

Turingmaschinen: berechnete Funktion

Definition (von einer Turingmaschine berechnete Funktion)

Eine DTM mit Eingabealphabet Σ berechnet
die (partielle) Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$, für die gilt:

für alle $x, y \in \Sigma^*$: $f(x) = y$ gdw. $z_0 x \vdash^* \Box \dots \Box z_e y \Box \dots \Box$

mit $z_e \in E$. (Spezialfall: $z_0\Box$ statt $z_0 x$ wenn $x = \varepsilon$)

- Was passiert, wenn Zeichen aus $\Gamma \setminus \Sigma$ (z. B. $\Box$) in y stehen?
- Was passiert, wenn der Lesekopf am Ende nicht auf dem ersten Zeichen von y steht?
- Ist f durch die Definition eindeutig definiert? Warum?

Turing-berechenbare Funktionen auf Wörtern

Definition (Turing-berechenbar, $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$)

Eine (partielle) Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ heisst Turing-berechenbar,
wenn eine DTM existiert, die f berechnet.

Kodierung von Zahlen als Wörter

Definition (kodierte Funktion)

Sei $f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ eine (partielle) Funktion.
Die kodierte Funktion f^{code} zu f ist die partielle Funktion
$f^{\text{code}} : \Sigma^* \to \Sigma^*$ mit $\Sigma = \{0, 1, \#\}$ und $f^{\text{code}}(w) = w'$ gdw.

- es gibt $n_1, \dots, n_k, n' \in \mathbb{N}_0$, so dass
- $f(n_1, \dots, n_k) = n'$,
- $w = bin(n_1)\#\dots\#bin(n_k)$ und
- $w' = bin(n')$.

Hierbei bezeichnet $bin : \mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}^*$ die Binärkodierung (z.B. $bin(5) = 101$).

Beispiel: $f(5, 2, 3) = 4$ entspricht $f^{\text{code}}(101\#10\#11) = 100$.

Turing-berechenbare numerische Funktionen

Definition (Turing-berechenbar, $f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$)

Eine (partielle) Funktionen $f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ heisst Turing-berechenbar,
wenn eine DTM existiert, die f^{code} berechnet.

13.4 Beispiele

Beispiel: Turing-berechenbare Funktionen (1)

Beispiel

Sei $\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \#\}$.
Die Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ mit $f(w) = w\#w$ für alle $w \in \Sigma^*$ ist Turing-berechenbar.

$\rightsquigarrow$ Tafel

Beispiel: Turing-berechenbare Funktionen (2)

Beispiel

Die folgenden numerischen Funktionen sind Turing-berechenbar:

- $\mathit{succ} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $\mathit{succ}(n) := n + 1$
- $\mathit{pred}_1 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $\mathit{pred}_1(n) := \begin{cases} n-1 & \text{falls } n \geq 1 \\ 0 & \text{falls } n = 0 \end{cases}$
- $\mathit{pred}_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $\mathit{pred}_2(n) := \begin{cases} n-1 & \text{falls } n \geq 1 \\ \text{undefined} & \text{falls } n = 0 \end{cases}$

$\rightsquigarrow$ Tafel/Hausaufgaben

Beispiel: Turing-berechenbare Funktionen (3)

Beispiel

Die folgenden numerischen Funktionen sind Turing-berechenbar:

- $\mathit{add} : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ mit $\mathit{add}(n_1, n_2) := n_1 + n_2$
- $\mathit{sub} : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ mit $\mathit{sub}(n_1, n_2) := \max\{n_1 - n_2, 0\}$
- $\mathit{mul} : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ mit $\mathit{mul}(n_1, n_2) := n_1 \cdot n_2$
- $\mathit{div} : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ mit $\mathit{div}(n_1, n_2) := \begin{cases} \left\lceil \frac{n_1}{n_2} \right\rceil & \text{falls } n_2 \neq 0 \\ \text{undefined} & \text{falls } n_2 = 0 \end{cases}$

$\rightsquigarrow$ Skizze?

13.5 Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Fragestellung: Was können Computer berechnen?
- Ansatz: untersuche formale Berechnungsmodelle
- zunächst: deterministische Turingmaschinen
- Turing-berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$:
  es gibt eine DTM, die auf jede „Eingabe“ $w \in \Sigma^*$
  die „Ausgabe“ $f(w)$ produziert (undefiniert, wenn DTM nicht oder in ungültiger Konfiguration anhält)
- Turing-berechenbare Funktion $f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$:
  genauso; Zahlen binär kodiert und durch # getrennt