Theorie der Informatik

12. Kontextsensitive und Typ-0-Sprachen

Malte Helmert Gabriele Röger

Universität Basel

8. April 2015

Kontextsensitive und allgemeine Grammatiken

Wiederholung: (kontextsensitive) Grammatiken

Definition (Grammatik)

Eine Grammatik ist ein 4-Tupel (Σ, V, P, S) mit

- Σ endliches Terminalalphabet,
- V endliche Menge von Variablen (mit $V \cap \Sigma = \emptyset$),
- $P \subseteq (V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^*$ endliche Menge von Regeln, und
- $S \in V$ Startvariable.

Typ 0 und Typ 1

- Jede Grammatik ist eine Typ-0-Grammatik.
- Bei kontextsensitiven (Typ-1) Grammatiken gilt für alle Regeln $w_1 \to w_2$, dass $|w_1| \leq |w_2|$.
  Einzige Ausnahme: Regel $S \to \varepsilon$ ist für Startsymbol S erlaubt, falls S auf keiner rechten Regelseite vorkommt.

Turingmaschinen

Automatenmodell für Typ-1- und Typ-0-Sprachen?

Endliche Automaten akzeptieren genau die regulären Sprachen, Kellerautomaten genau die kontextfreien Sprachen. Gibt es auch ein Automatenmodell für kontextsensitive und Typ-0-Sprachen?

Automatenmodell für Typ-1- und Typ-0-Sprachen?

Endliche Automaten akzeptieren genau die regulären Sprachen, Kellerautomaten genau die kontextfreien Sprachen. Gibt es auch ein Automatenmodell für kontextsensitive und Typ-0-Sprachen?

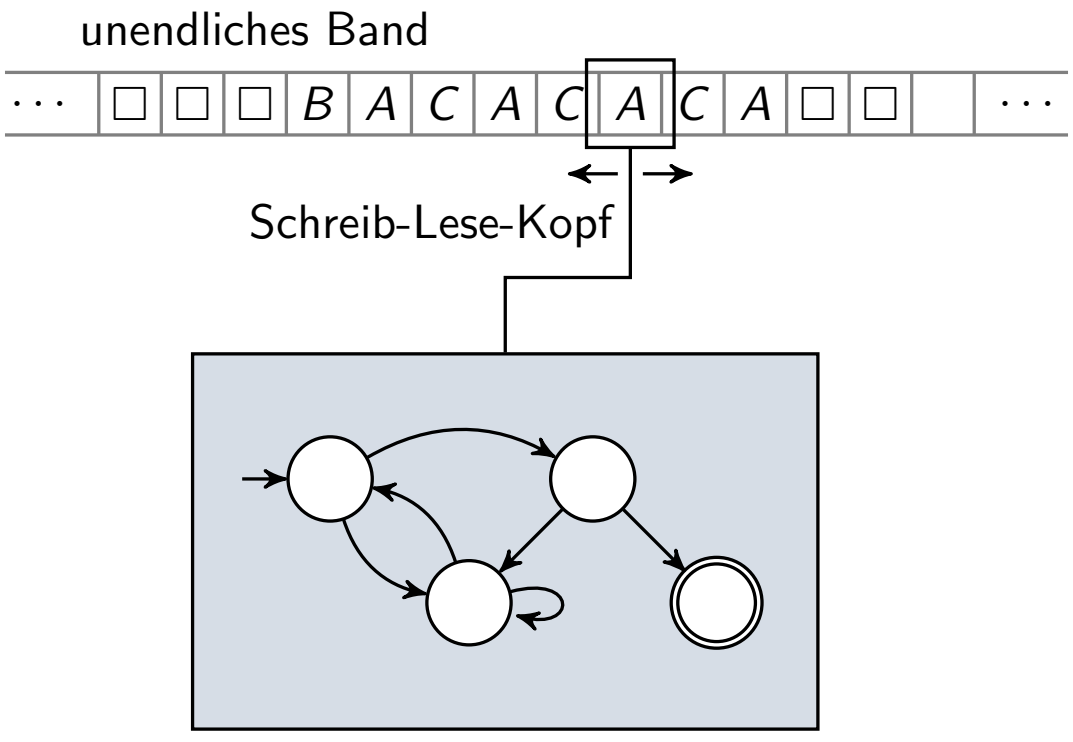
Ja! (Linear beschränkte) Turingmaschinen.

Alan Turing (1912-1954)

Foto mit freundlicher Genehmigung von Jon Callas / wikimedia commons

- Britischer Logiker, Mathematiker, Kryptoanalytiker und Informatiker
- Wichtigste Arbeit (für uns): On Computable Numbers, with an Application to the „Entscheidungsproblem“ → Turingmaschine
- Mitarbeit an Enigma-Entschlüsselung
- Wegen Homosexualität verurteilt, wurde aber im Dezember 2013 von Elizabeth II begnadigt
- Turing-Award wichtigster Wissenschaftspreis in der Informatik

Turingmaschine: konzeptuell



Nichtdeterministische Turingmaschine: Definition

Definition (Nichtdeterministische Turingmaschine)

Eine (nichtdeterministische) Turingmaschine (NTM) ist gegeben durch ein 7-Tupel $M = \langle Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E \rangle$ mit:

- Z endliche, nicht-leere Menge von Zuständen
- $\Sigma \neq \emptyset$ endliches Eingabealphabet
- $\Gamma \supset \Sigma$ endliches Bandalphabet
- $\delta : (Z \setminus E) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Z \times \Gamma \times \{\mathrm{L}, \mathrm{R}, \mathrm{N}\})$ Übergangsfunktion
- $z_0 \in Z$ Startzustand
- $\square \in \Gamma \setminus \Sigma$ Blank-Zeichen
- $E \subseteq Z$ Endzustände

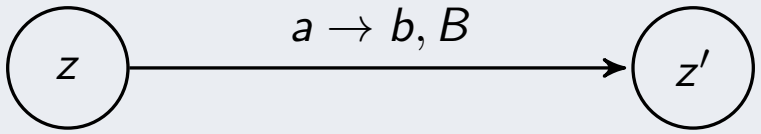
Turingmaschine: Übergangsfunktion

Sei $M = \langle Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E \rangle$ nichtdeterministische Turingmaschine.

Was bedeutet Übergangsfunktion δ intuitiv?

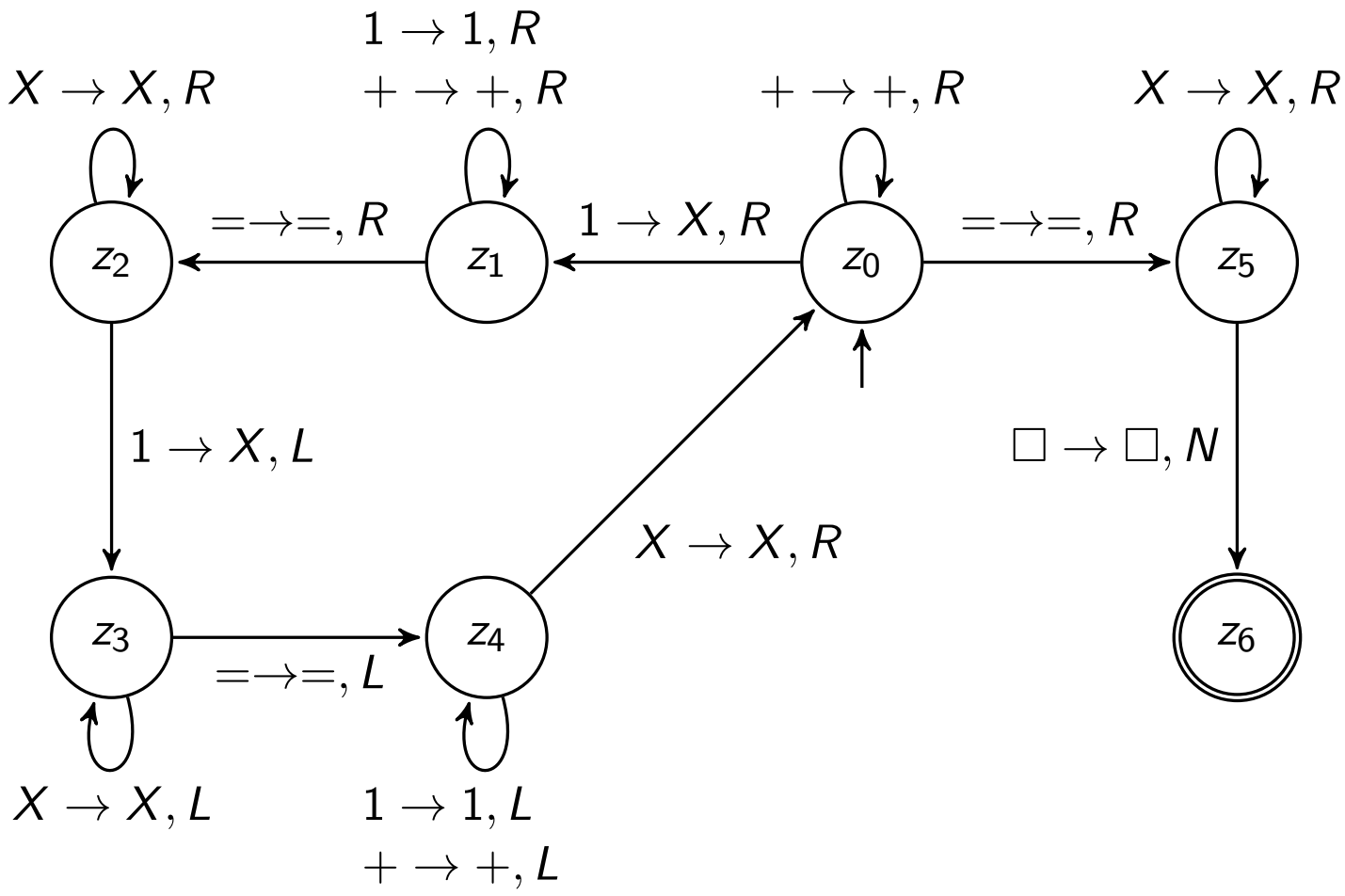
$(z', b, B) \in \delta(z, a)$: Wenn M im Zustand z das Zeichen a liest, dann kann M im nächsten Schritt in Zustand z' übergehen, a durch b ersetzen, und den Schreib-Lesekopf in Richtung $B \in \{L, N, R\}$ bewegen. Dabei bedeutet

- L einen Schritt nach links,
- N die neutrale Bewegung (also Stehenbleiben), und
- R einen Schritt nach rechts.



Nichtdeterministische Turingmaschine: Beispiel

$$M = (\{z_0, z_1, \ldots, z_6\}, \{1, +, =\}, \{1, +, =, X, \square\}, \delta, z_0, \square, \{z_6\})$$



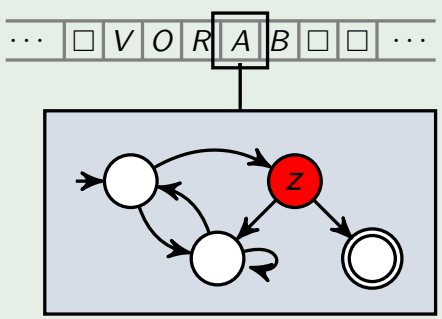
Turingmaschine: Konfiguration

Definition (Konfiguration einer Turingmaschine)

Eine Konfiguration einer Turingmaschine $M = \langle Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E \rangle$ ist gegeben durch ein Wort $k \in \Gamma^* Z \Gamma^+$.

Konfiguration $w_1 z w_2$ bedeutet, dass der nicht-leere bzw. bereits besuchte Teil des Bandes das Wort $w_1 w_2$ enthält, der Schreib-Lesekopf auf dem ersten Zeichen von w_2 steht und die TM sich in Zustand z befindet.

Beispiel



Konfiguration $\square VORzAB\square\square$.

Turingmaschine: Berechnungsschritt

Definition (Berechnungsschritt einer Turingmaschine)

Eine NTM $M = \langle Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E \rangle$ kann nach den folgenden Regeln in einem Berechnungsschritt von Konfiguration k in Konfiguration k' übergehen ($k \vdash_M k'$):

$a_1 \dots a_m z b_1 \dots b_n \vdash_M$

$$\begin{cases} a_1 \dots a_m z' c b_2 \dots b_n, \text{falls } (z', c, N) \in \delta(z, b_1), m \geq 0, n \geq 1 \\ a_1 \dots a_m c z' b_2 \dots b_n, \text{falls } (z', c, R) \in \delta(z, b_1), m \geq 0, n \geq 2 \\ a_1 \dots a_{m-1} z' a_m c b_2 \dots b_n, \text{falls } (z', c, L) \in \delta(z, b_1), m \geq 1, n \geq 1 \\ a_1 \dots a_m c z' \square, \text{falls } (z', c, R) \in \delta(z, b_1), m \geq 0, n = 1 \\ z' \square c b_2 \dots b_n, \text{falls } (z', c, L) \in \delta(z, b_1), m = 0, n \geq 1 \end{cases}$$

Turingmaschine: Erreichbarkeit von Konfigurationen

Definition (Erreichbare Konfiguration)

Konfiguration k' ist mit NTM M von Konfiguration k aus erreichbar ($k \vdash_M^* k'$), falls $k = k'$ oder es gibt Konfigurationen $k_0, \ldots, k_n$ ($n \geq 1$), so dass

- $k_0 = k$,
- $k_i \vdash_M k_{i+1}$ für $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, und
- $k_n = k'$.

Turingmaschine: Erkanntes Wort

Definition (erkanntes Wort bei Turingmaschinen)

NTM $M = \langle Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E \rangle$ erkennt das Wort w genau dann, wenn M von der Startkonfiguration $z_0 w$ mit endlich vielen Berechnungsschritten in eine Konfiguration mit einem Endzustand übergehen kann:

$$M \text{ erkennt } w \text{ gdw. } z_0 w \vdash_M^* w_1 z w_2 \text{ mit } z \in E, w_1 \in \Gamma^*, w_2 \in \Gamma^+.$$

Spezialfall: Für $w = \varepsilon$ ist die Startkonfiguration $z_0 \square$.

Beispiel: Tafel

Turingmaschine: Akzeptierte Sprache

Definition (akzeptierte Sprache einer NTM)

Sei M eine nichtdeterministische Turingmaschine mit Eingabealphabet Σ. Die von M akzeptierte Sprache ist definiert durch

$$\mathcal{L}(M) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ wird von } M \text{ erkannt}\}.$$

Beispiel: Tafel

Fragen

Fragen?

Linear beschränkte Turingmaschinen

Brauchen wir
nicht unterschiedliche
Automatenmodelle für
kontextsensitive und
Typ-0-Sprachen?

Foto mit freundlicher Genehmigung von stockimages / FreeDigitalPhotos.net

Linear beschränkte Turingmaschinen: Idee

- Linear beschränkte Turingmaschinen dürfen nur den Teil des Bandes verwenden, der durch das Eingabewort belegt wird.

Linear beschränkte Turingmaschinen: Idee

- Linear beschränkte Turingmaschinen dürfen nur den Teil des Bandes verwenden, der durch das Eingabewort belegt wird.
- Kann vorderes Ende der Eingabe im ersten Schritt markieren.

Linear beschränkte Turingmaschinen: Idee

- Linear beschränkte Turingmaschinen dürfen nur den Teil des Bandes verwenden, der durch das Eingabewort belegt wird.
- Kann vorderes Ende der Eingabe im ersten Schritt markieren.
- Problem: Muss verhindern, über das hintere Bandende hinauszulaufen

Linear beschränkte Turingmaschinen: Idee

- Linear beschränkte Turingmaschinen dürfen nur den Teil des Bandes verwenden, der durch das Eingabewort belegt wird.
- Kann vorderes Ende der Eingabe im ersten Schritt markieren.
- Problem: Muss verhindern, über das hintere Bandende hinauszulaufen
- Für Sprache über Σ hat linear beschränkte Turingmaschine modifiziertes Eingabealphabet $\Sigma \cup \{\hat{a} \mid a \in \Sigma\}$.

Linear beschränkte Turingmaschinen: Idee

- Linear beschränkte Turingmaschinen dürfen nur den Teil des Bandes verwenden, der durch das Eingabewort belegt wird.
- Kann vorderes Ende der Eingabe im ersten Schritt markieren.
- Problem: Muss verhindern, über das hintere Bandende hinauszulaufen
- Für Sprache über Σ hat linear beschränkte Turingmaschine modifiziertes Eingabealphabet $\Sigma \cup \{\hat{a} \mid a \in \Sigma\}$.
- Eigentliche Eingabe $a_1 \dots a_n$ wird auf dem Band repräsentiert als $a_1 \dots a_{n-1} \hat{a}_n$.

Linear beschränkte Turingmaschinen: Definition

Definition (Linear beschränkte NTM)

Eine (nichtdeterministische) Turingmaschine heisst linear beschränkt, wenn für alle $a_1 \dots a_n \in \Sigma^+$ und alle Konfigurationen $w_1 z w_2$ mit $z_0 a_1 \dots a_{n-1} \hat{a}_n \vdash^* w_1 z w_2$ gilt $|w_1 w_2| = n$.

Linear beschränkte NTMs akzeptieren Typ-1-Sprachen

Satz

Die von linear beschränkten, nichtdeterministischen Turingmaschinen (LBAs) akzeptierbaren Sprachen sind genau die kontextsensitiven (Typ 1) Sprachen.

Ohne Beweis.

Linear beschränkte NTMs akzeptieren Typ-1-Sprachen

Satz

Die von linear beschränkten, nichtdeterministischen Turingmaschinen (LBAs) akzeptierbaren Sprachen sind genau die kontextsensitiven (Typ 1) Sprachen.

Ohne Beweis.

NTMs akzeptieren Typ-0-Sprachen

Satz

Die durch nichtdeterministische Turingmaschinen akzeptierbaren Sprachen sind genau die Typ-0-Sprachen.

Ohne Beweis.

Fragen

Fragen?

Deterministische Turingmaschinen

Definition (Deterministische Turingmaschine)

Eine deterministische Turingmaschine (DTM) ist eine Turingmaschine $M = \langle Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E \rangle$ mit $\delta : (Z \setminus E) \times \Gamma \to Z \times \Gamma \times \{\mathrm{L}, \mathrm{R}, \mathrm{N}\}$.

Deterministische Turingmaschinen

Satz

Für jede Typ-0-Sprache L gibt es eine deterministische Turingmaschine M mit $\mathcal{L}(M) = L$.

Deterministische Turingmaschinen

Satz

Für jede Typ-0-Sprache L gibt es eine deterministische Turingmaschine M mit $\mathcal{L}(M) = L$.

Beweisskizze.

Sei M' eine nichtdeterministische Turingmaschine mit $\mathcal{L}(M') = L$. Man konstruiert eine deterministische Turingmaschine, die systematisch den Berechnungsbaum von M' nach einer Konfiguration mit Endzustand untersucht.

Deterministische Turingmaschinen

Satz

Für jede Typ-0-Sprache L gibt es eine deterministische Turingmaschine M mit $\mathcal{L}(M) = L$.

Beweisskizze.

Sei M' eine nichtdeterministische Turingmaschine mit $\mathcal{L}(M') = L$. Man konstruiert eine deterministische Turingmaschine, die systematisch den Berechnungsbaum von M' nach einer Konfiguration mit Endzustand untersucht.

Bemerkung: Es ist ein offenes Problem, ob der Satz analog für Typ-1-Sprachen und deterministische LBAs gilt.

Abschlusseigenschaften und Entscheidbarkeit

Abschlusseigenschaften

	Schnitt	Vereinigung	Komplement	Produkt	Stern
Typ 3	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja
Typ 2	Nein	Ja	Nein	Ja	Ja
Typ 1	Ja$^{(1)}$	Ja$^{(1)}$	Ja$^{(1)}$	Ja$^{(1)}$	Ja$^{(1)}$
Typ 0	Ja$^{(1)}$	Ja$^{(1)}$	Nein$^{(2)}$	Ja$^{(1)}$	Ja$^{(1)}$

Beweise?
(1) ohne Beweis
(2) Beweis in späteren Vorlesungskapiteln

Entscheidbarkeit

	Wort-problem	Leerheits-problem	Äquivalenz-problem	Schnitt-problem
Typ 3	Ja	Ja	Ja	Ja
Typ 2	Ja	Ja	Nein	Nein
Typ 1	Ja	Nein$^{(1)}$	Nein$^{(1)}$	Nein$^{(1)}$
Typ 0	Nein$^{(2)}$	Nein$^{(2)}$	Nein$^{(2)}$	Nein$^{(2)}$

(1) ohne Beweise (2) Beweis in Vorlesungsabschnitt 3

Wortproblem bei kontextsensitiven Sprachen:

Mit Typ-1-Grammatiken werden Wörter durch Ableitungen niemals kürzer, daher kann man alle Ableitungsmöglichkeiten bis zur Grösse des gegebenen Wortes ausprobieren.

Fragen

Fragen?

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Turingmaschinen haben zwar nur endlich viele Zustände, aber ein unendlich grosses Band als „Speicher“.
- Turingmaschinen akzeptieren genau die Typ-0-Sprachen.
  Dies gilt auch für deterministische Turingmaschinen.
- Linear beschränkte Turingmaschinen akzeptieren genau die kontextsensitiven Sprachen.
- Die kontextsensitiven und Typ-0-Sprachen sind unter fast allen gängigen Operationen abgeschlossen.
  Ausnahme: Typ-0 nicht unter Komplement abgeschlossen
- Für kontextsensitive und Typ-0-Sprachen ist fast kein Problem entscheidbar.
  Ausnahme: Wortproblem für Typ-1 ist entscheidbar.

Wo sind wir und wie geht es weiter?

Inhalte dieser Vorlesung

- Logik ✓
  ▷ Wie kann man Wissen und Zusammenhänge repräsentieren und automatisiert verarbeiten?
- Automatentheorie und formale Sprachen
  ▷ Was ist eine Berechnung?
- Berechenbarkeitstheorie
  ▷ Was kann überhaupt berechnet werden?
- Komplexitätstheorie
  ▷ Was kann effizient berechnet werden?

Wo sind wir und wie geht es weiter?

Inhalte dieser Vorlesung

- Logik ✓
  ▷ Wie kann man Wissen und Zusammenhänge repräsentieren und automatisiert verarbeiten?
- Automatentheorie und formale Sprachen ✓
  ▷ Was ist eine Berechnung?
- Berechenbarkeitstheorie
  ▷ Was kann überhaupt berechnet werden?
- Komplexitätstheorie
  ▷ Was kann effizient berechnet werden?