

Theorie der Informatik

11. Kontextfreie Sprachen II

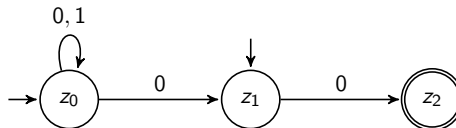
Malte Helmert Gabriele Röger

Universität Basel

1. April 2014

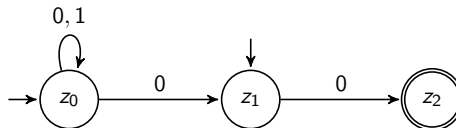
Kellerautomaten

Limitierung von endlichen Automaten



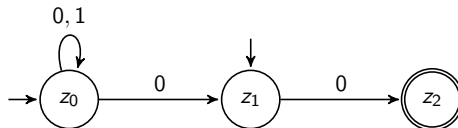
- Sprache L ist regulär
 $\Leftrightarrow$ es gibt einen endlichen Automaten, der L akzeptiert

Limitierung von endlichen Automaten



- Sprache L ist regulär
 $\Leftrightarrow$ es gibt einen endlichen Automaten, der L akzeptiert
- Welche Information kann ein endlicher Automat über das bereits gelesene Teilwort „speichern“?

Limitierung von endlichen Automaten

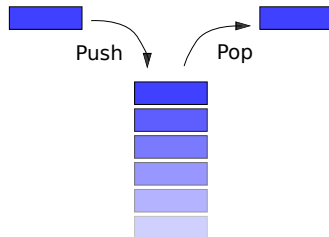


- Sprache L ist regulär
 $\Leftrightarrow$ es gibt einen endlichen Automaten, der L akzeptiert
- Welche Information kann ein endlicher Automat über das bereits gelesene Teilwort „speichern“?
- Für $L = \{a_1 a_2 \dots a_n a_n \dots a_2 a_1 \mid n > 0, a_i \in \{0, 1\}\}$ wäre unendlicher Speicher notwendig.
- Daher: Erweiterung von Automatenmodell um Speicher

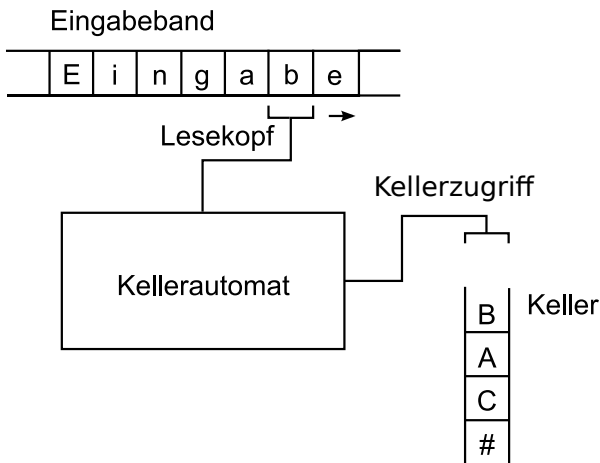
Keller

Ein **Keller** (oder **Stapel**, engl. **Stack**) ist eine Datenstruktur nach dem **Last-In-First-Out-Prinzip (LIFO)** mit folgenden Operationen:

- **push**: Legt ein Objekt oben auf den Stapel
- **pop**: Nimmt das oberste Objekt vom Stapel
- **peek**: Liefert das oberste Objekt zurück ohne es zu entfernen



Kellerautomat: anschaulich



Kellerautomat: Definition

Definition (Kellerautomat = PDA)

Ein **Kellerautomat** (push-down automaton, **PDA**) ist ein 6-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ mit

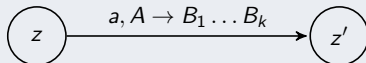
- Z endliche Menge der Zustände,
- Σ das Eingabealphabet,
- Γ das Kelleralphabet,
- $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}_e(Z \times \Gamma^*)$ die Überföhrungsfunktion (mit $\mathcal{P}_e$ Menge aller **endlichen** Teilmengen)
- $z_0 \in Z$ der Startzustand
- $\# \in \Gamma$ das unterste Kellerzeichen

Kellerautomat: Übergangsfunktion

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ Kellerautomat.

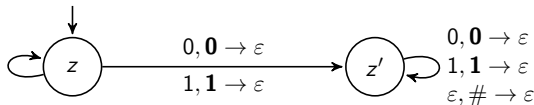
Was bedeutet Übergangsfunktion δ intuitiv?

- $(z', B_1 \dots B_k) \in \delta(z, a, A)$: Wenn M im Zustand z das Zeichen a liest und A das oberste Kellerzeichen ist, dann **kann** M im nächsten Schritt in z' übergehen und A durch $B_1 \dots B_k$ ersetzen (danach B_1 oberstes Kellerzeichen)



- Spezialfall $a = \varepsilon$ zugelassen (spontaner Übergang)

Kellerautomat: Beispiel

 $0, \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{00}$
 $0, \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{01}$
 $0, \# \rightarrow \mathbf{0\#}$
 $1, \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{10}$
 $1, \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{11}$
 $1, \# \rightarrow \mathbf{1\#}$


$M = (\{z, z'\}, \{0, 1\}, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \#\}, \delta, z, \#)$ mit

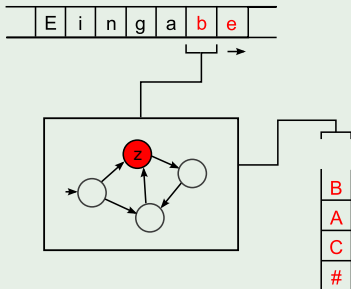
 $\delta(z, 0, \mathbf{0}) = \{(z, \mathbf{00}), (z', \varepsilon)\}$
 $\delta(z, 1, \mathbf{0}) = \{(z, \mathbf{10})\}$
 $\delta(z, \varepsilon, \mathbf{0}) = \emptyset$
 $\delta(z, 0, \mathbf{1}) = \{(z, \mathbf{01})\}$
 $\delta(z, 1, \mathbf{1}) = \{(z, \mathbf{11}), (z', \varepsilon)\}$
 $\delta(z, \varepsilon, \mathbf{1}) = \emptyset$
 $\delta(z, 0, \#) = \{(z, \mathbf{0\#})\}$
 $\delta(z, 1, \#) = \{(z, \mathbf{1\#})\}$
 $\delta(z, \varepsilon, \#) = \emptyset$
 $\delta(z', 0, \mathbf{0}) = \{(z', \varepsilon)\}$
 $\delta(z', 1, \mathbf{0}) = \emptyset$
 $\delta(z', \varepsilon, \mathbf{0}) = \emptyset$
 $\delta(z', 0, \mathbf{1}) = \emptyset$
 $\delta(z', 1, \mathbf{1}) = \{(z', \varepsilon)\}$
 $\delta(z', \varepsilon, \mathbf{1}) = \emptyset$
 $\delta(z', 0, \#) = \{(z', \varepsilon)\}$
 $\delta(z', 1, \#) = \emptyset$
 $\delta(z', \varepsilon, \#) =$
 $\{(z', \varepsilon)\}$

Kellerautomat: Konfiguration

Definition (Konfiguration eines Kellerautomaten)

Eine **Konfiguration** eines Kellerautomaten $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ ist gegeben durch ein Tripel $k \in Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*$.

Beispiel



Konfiguration
 $(z, be, BAC\#)$.

Kellerautomat: Übergang

Definition (Übergang eines Kellerautomaten)

Wir schreiben $k \vdash_M k'$, falls ein Kellerautomat $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ von Konfiguration k in Konfiguration k' übergehen kann. Es sind genau folgende Übergänge möglich:

$$(z, a_1 \dots a_n, A_1 \dots A_m) \vdash_M \begin{cases} (z', a_2 \dots a_n, B_1 \dots B_k A_2 \dots A_m) \\ \quad \text{falls } (z', B_1 \dots B_k) \in \delta(z, a_1, A_1) \\ \\ (z', a_1 a_2 \dots a_n, B_1 \dots B_k A_2 \dots A_m) \\ \quad \text{falls } (z', B_1 \dots B_k) \in \delta(z, \varepsilon, A_1) \end{cases}$$

Falls M aus dem Kontext klar ist, schreiben wir nur $k \vdash k'$.

Kellerautomat: Erreichbarkeit von Konfigurationen

Definition (Erreichbare Konfiguration)

Konfiguration k' ist in PDA M von Konfiguration k aus **erreichbar** ($k \vdash_M^* k'$), falls $k = k'$ oder es gibt Konfigurationen $k_0, \dots, k_n$ ($n \geq 1$), so dass

- $k_0 = k$,
- $k_i \vdash_M k_{i+1}$ für $i \in \{0, \dots, n-1\}$, und
- $k_n = k'$.

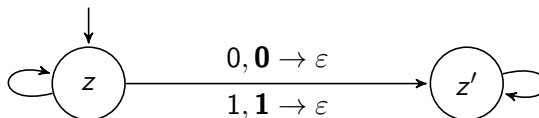
Kellerautomat: Erkanntes Wort

Definition (erkanntes Wort bei Kellerautomaten)

PDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ **erkennt das Wort** $w = a_0 \dots a_n$ genau dann, wenn M von der **Startkonfiguration** $(z_0, w, \#)$ durch endliches Anwenden von δ in eine Konfiguration $(z, \varepsilon, \varepsilon)$ übergehen kann (**Wort verarbeitet** und **Keller leer**):

M erkennt w gdw. $(z_0, w, \#) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$ für ein $z \in Z$.

Kellerautomat: Beispiel für erkanntes Wort

 $0, 0 \rightarrow 00$
 $0, 1 \rightarrow 01$
 $0, \# \rightarrow 0\#$
 $1, 0 \rightarrow 10$
 $1, 1 \rightarrow 11$
 $1, \# \rightarrow 1\#$

 $0, 0 \rightarrow \varepsilon$
 $1, 1 \rightarrow \varepsilon$
 $\varepsilon, \# \rightarrow \varepsilon$

Der PDA erkennt zum Beispiel das Wort 11011011.

(Begründung an Tafel)

Kellerautomat: Akzeptierte Sprache

Definition (akzeptierte Sprache eines PDAs)

Sei M ein Kellerautomat mit Eingabealphabet Σ . Die von M **akzeptierte Sprache** ist definiert durch

$$\mathcal{L}(M) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ wird von } M \text{ erkannt}\}.$$

Beispiel: Tafel

Fragen



Fragen?

PDAs akzeptieren genau kontextfreie Sprachen

Satz

*Eine Sprache L ist genau dann kontextfrei,
wenn L von einem Kellerautomaten akzeptiert wird.*

PDAs akzeptieren genau kontextfreie Sprachen

Beweis.

$\Rightarrow$: Sei $G = (\Sigma, V, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik für L .

Der Kellerautomat $M = (\{z\}, \Sigma, V \cup \Sigma, \delta, z, S)$ mit folgendem δ akzeptiert L .

- Für jede Regel $A \rightarrow w \in P$ mit $w \in (V \cup \Sigma)^*$ ist $(z, w) \in \delta(z, \varepsilon, A)$.
- Für $a \in \Sigma$ ist $(z, \varepsilon) \in \delta(z, a, a)$.

PDAs akzeptieren genau kontextfreie Sprachen

Beweis.

$\Rightarrow$: Sei $G = (\Sigma, V, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik für L .
Der Kellerautomat $M = (\{z\}, \Sigma, V \cup \Sigma, \delta, z, S)$ mit folgendem δ akzeptiert L .

- Für jede Regel $A \rightarrow w \in P$ mit $w \in (V \cup \Sigma)^*$ ist $(z, w) \in \delta(z, \varepsilon, A)$.
- Für $a \in \Sigma$ ist $(z, \varepsilon) \in \delta(z, a, a)$.

Denn:

$x \in \mathcal{L}(G)$

gdw. es gibt eine Ableitung in G der Form $S \Rightarrow \dots \Rightarrow x$

gdw. es gibt eine Folge von Konfigurationen von M mit

$(z, x, S) \vdash \dots \vdash (z, \varepsilon, \varepsilon)$

gdw. $x \in \mathcal{L}(M)$

...

PDAs akzeptieren genau kontextfreie Sprachen

Beweis (Fortsetzung).

$\Leftarrow$: Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ PDA mit $\mathcal{L}(M) = L$.

Wir nehmen o.B.d.A. an, dass für jede δ -Überführung $(z', B_1 \dots B_k) \in \delta(z, a, A)$ gilt, dass $k \leq 2$.

Sonst führen wir für jede Regel $(z', B_1 \dots B_k) \in \delta(z, a, A)$ mit $k > 2$ neue Zustände $z_1, \dots, z_{k-2}$ ein und ersetzen die Regel durch

$$\begin{aligned} \delta(z, a, A) &\ni (z_1, B_{k-1}B_k) \\ \delta(z_1, \varepsilon, B_{k-1}) &= \{(z_2, B_{k-2}B_{k-1})\} \\ &\vdots \\ \delta(z_{k-3}, \varepsilon, B_3) &= \{(z_{k-2}, B_2B_3)\} \\ \delta(z_{k-2}, \varepsilon, B_2) &= \{(z', B_1B_2)\} \end{aligned}$$

PDA's akzeptieren genau kontextfreie Sprachen

Beweis (Fortsetzung).

Konstruiere Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$, die Rechenschritte von M durch Linksableitungsschritte simuliert:

$$V = \{S\} \cup Z \times \Gamma \times Z$$

$$P = \{S \rightarrow (z_0, \#, z) \mid z \in Z\} \cup$$

$$\{(z, A, z') \rightarrow a \mid (z', \varepsilon) \in \delta(z, a, A)\} \cup$$

$$\{(z, A, z') \rightarrow a(z_1, B, z') \mid (z_1, B) \in \delta(z, a, A), z' \in Z\} \cup$$

$$\{(z, A, z') \rightarrow a(z_1, B, z_2)(z_2, C, z') \mid (z_1, BC) \in \delta(z, a, A), \\ z', z_2 \in Z\}$$

...

PDAs akzeptieren genau kontextfreie Sprachen

Beweis (Fortsetzung).

Wir werden zunächst allgemein für $x \in \Sigma^*$ zeigen, dass

$$(z, A, z') \Rightarrow_G^* x \text{ genau dann wenn } (z, x, A) \vdash_M^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$$

...

PDAs akzeptieren genau kontextfreie Sprachen

Beweis (Fortsetzung).

Wir werden zunächst allgemein für $x \in \Sigma^*$ zeigen, dass

$$(z, A, z') \Rightarrow_G^* x \text{ genau dann wenn } (z, x, A) \vdash_M^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$$

Für einen einzelnen Ableitungsschritt und $x = a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ gilt:

$$(z, A, z') \Rightarrow_G a \text{ gdw. } (z, A, z') \rightarrow a \in P$$

$$\text{gdw. } (z', \varepsilon) \in \delta(z, a, A)$$

$$\text{gdw. } (z, a, A) \vdash_M (z', \varepsilon, \varepsilon)$$

...

PDAs akzeptieren genau kontextfreie Sprachen

Beweis (Fortsetzung).

Wir zeigen per Induktion über die Anzahl n der Übergänge von M , dass allgemein $(z, A, z') \Rightarrow_G^* x$ aus $(z, x, A) \vdash_M^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$ folgt.

PDAs akzeptieren genau kontextfreie Sprachen

Beweis (Fortsetzung).

Wir zeigen per Induktion über die Anzahl n der Übergänge von M , dass allgemein $(z, A, z') \Rightarrow_G^* x$ aus $(z, x, A) \vdash_M^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$ folgt.

Für $n = 1$ (einzelner Übergang) ist das bereits gezeigt.

PDAs akzeptieren genau kontextfreie Sprachen

Beweis (Fortsetzung).

Wir zeigen per Induktion über die Anzahl n der Übergänge von M , dass allgemein $(z, A, z') \Rightarrow_G^* x$ aus $(z, x, A) \vdash_M^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$ folgt.

Für $n = 1$ (einzelner Übergang) ist das bereits gezeigt.

Falls $n > 1$, hat x Form $x = ay$ mit $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$.

Es gibt daher Zustand z_1 und Kellerinhalt α , so dass

$(z, ay, A) \vdash_M (z_1, y, \alpha) \vdash_M^+ (z', \varepsilon, \varepsilon)$. Unterscheide drei Fälle für α :

PDAs akzeptieren genau kontextfreie Sprachen

Beweis (Fortsetzung).

Wir zeigen per Induktion über die Anzahl n der Übergänge von M , dass allgemein $(z, A, z') \Rightarrow_G^* x$ aus $(z, x, A) \vdash_M^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$ folgt.

Für $n = 1$ (einzelner Übergang) ist das bereits gezeigt.

Falls $n > 1$, hat x Form $x = ay$ mit $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$.

Es gibt daher Zustand z_1 und Kellerinhalt α , so dass

$(z, ay, A) \vdash_M (z_1, y, \alpha) \vdash_M^+ (z', \varepsilon, \varepsilon)$. Unterscheide drei Fälle für α :

- Fall $\alpha = \varepsilon$ nicht möglich, da (z_1, y, ε) keine Folgekonfiguration besitzt.

PDAs akzeptieren genau kontextfreie Sprachen

Beweis (Fortsetzung).

Wir zeigen per Induktion über die Anzahl n der Übergänge von M , dass allgemein $(z, A, z') \Rightarrow_G^* x$ aus $(z, x, A) \vdash_M^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$ folgt.

Für $n = 1$ (einzelner Übergang) ist das bereits gezeigt.

Falls $n > 1$, hat x Form $x = ay$ mit $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$.

Es gibt daher Zustand z_1 und Kellerinhalt α , so dass

$(z, ay, A) \vdash_M (z_1, y, \alpha) \vdash_M^+ (z', \varepsilon, \varepsilon)$. Unterscheide drei Fälle für α :

- Fall $\alpha = \varepsilon$ nicht möglich, da (z_1, y, ε) keine Folgekonfiguration besitzt.
- Fall $\alpha = B$: Dann gilt nach IV $(z_1, B, z') \Rightarrow_G^* y$. Wegen Regel $(z, A, z') \rightarrow a(z_1, B, z')$ gibt es die Gesamtableitung $(z, A, z') \Rightarrow a(z_1, B, z') \Rightarrow_G^* ay = x$.

PDA's akzeptieren genau kontextfreie Sprachen

Beweis (Fortsetzung).

- Fall $\alpha = BC$: $(z_1, y, BC) \vdash_M^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$ kann zerlegt werden in $(z_1, y, BC \vdash_M^* (z_2, y_2, C)$ und $(z_2, y_2, C) \vdash_M^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$, so dass y_2 Suffix von y ist, d.h. $y = y_1 y_2$. Für y_1 gilt zudem, dass $(z_1, y_1, B) \vdash_M^* (z_2, \varepsilon, \varepsilon)$.

Nach IV gilt daher $(z_1, B, z_2) \Rightarrow_G^* y_1$ und $(z_2, C, z') \Rightarrow_G^* y_2$.

Wegen des Übergangs $(z, ay, A) \vdash_M (z_1, y, BC)$ muss es in P eine Regel der Form $(z, A, z') \rightarrow a(z_1, B, z_2)(z_2, C, z')$ geben.

Wir erhalten zusammen die Ableitung

$$(z, A, z') \Rightarrow_G a(z_1, B, z_2)(z_2, C, z') \Rightarrow_G^* ay_1 y_2 = x.$$

...

PDAs akzeptieren genau kontextfreie Sprachen

Beweis (Fortsetzung).

Bleibt zu zeigen, dass aus der Ableitbarkeit $(z, A, z') \Rightarrow_G^* x$ die Übergangsmöglichkeit $(z, x, A) \vdash_M^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$ folgt. Wir zeigen dies per Induktion über die Länge k der Linksableitung von x .

PDAs akzeptieren genau kontextfreie Sprachen

Beweis (Fortsetzung).

Bleibt zu zeigen, dass aus der Ableitbarkeit $(z, A, z') \Rightarrow_G^* x$ die Übergangsmöglichkeit $(z, x, A) \vdash_M^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$ folgt. Wir zeigen dies per Induktion über die Länge k der Linksableitung von x .

Für $k = 1$ (ein Ableitungsschritt) ist dies bereits erledigt.

PDAs akzeptieren genau kontextfreie Sprachen

Beweis (Fortsetzung).

Bleibt zu zeigen, dass aus der Ableitbarkeit $(z, A, z') \Rightarrow_G^* x$ die Übergangsmöglichkeit $(z, x, A) \vdash_M^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$ folgt. Wir zeigen dies per Induktion über die Länge k der Linksableitung von x .

Für $k = 1$ (ein Ableitungsschritt) ist dies bereits erledigt.

Für $k > 1$ unterscheide drei Fälle:

- Fall $(z, A, z') \Rightarrow_G a \Rightarrow_G^* x$: Dann ist $x = a$, was bei $k > 1$ nicht möglich ist.

PDAs akzeptieren genau kontextfreie Sprachen

Beweis (Fortsetzung).

Bleibt zu zeigen, dass aus der Ableitbarkeit $(z, A, z') \Rightarrow_G^* x$ die Übergangsmöglichkeit $(z, x, A) \vdash_M^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$ folgt. Wir zeigen dies per Induktion über die Länge k der Linksableitung von x .

Für $k = 1$ (ein Ableitungsschritt) ist dies bereits erledigt.

Für $k > 1$ unterscheide drei Fälle:

- Fall $(z, A, z') \Rightarrow_G a \Rightarrow_G^* x$: Dann ist $x = a$, was bei $k > 1$ nicht möglich ist.
- Fall $(z, A, z') \Rightarrow_G a(z_1, B, z') \Rightarrow_G^* ay = x$: Dann ist $(z_1, B) \in \delta(z, a, A)$ und nach IV gilt $(z_1, y, B) \vdash_M^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$. Insgesamt folgt $(z, ay, A) \vdash_M (z_1, y, B) \vdash_M^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$.

PDAs akzeptieren genau kontextfreie Sprachen

Beweis (Fortsetzung).

- Fall $(z, A, z') \Rightarrow_G a(z_1, B, z_2)(z_2, C, z') \Rightarrow_G^* ay = x$: Dann ist $(z_1, BC) \in \delta(z, a, A)$ und nach IV gilt $(z_1, y_1, B) \vdash_M^* (z_2, \varepsilon, \varepsilon)$ und $(z_2, y_2, C) \vdash_M^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$, wobei $y = y_1y_2$. Insgesamt folgt $(z, ay_1y_2, A) \vdash_M (z_1, y_1y_2, BC) \vdash_M^* (z_2, y_2, C) \vdash_M^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$.

...

PDAs akzeptieren genau kontextfreie Sprachen

Beweis (Fortsetzung).

Insgesamt haben wir für einen gegebenen PDA M eine kontextfreie Grammatik G angegeben, so dass für alle Wörter x gilt

$$(z, A, z') \Rightarrow_G^* x \text{ genau dann wenn } (z, x, A) \vdash_M^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$$



PDAs akzeptieren genau kontextfreie Sprachen

Beweis (Fortsetzung).

Insgesamt haben wir für einen gegebenen PDA M eine kontextfreie Grammatik G angegeben, so dass für alle Wörter x gilt

$$(z, A, z') \Rightarrow_G^* x \text{ genau dann wenn } (z, x, A) \vdash_M^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{L}(M) & \text{ gdw. } (z_0, x, \#) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon) \text{ für ein } z \in Z \\ & \text{ gdw. } S \Rightarrow_G (z_0, \#, z) \Rightarrow_G^* x \text{ für ein } z \in Z \\ & \text{ gdw. } x \in \mathcal{L}(G). \end{aligned}$$

Die Grammatik erzeugt also die vom PDA akzeptierte Sprache. $\square$

Fragen



Fragen?

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Kellerautomaten (PDAs) erweitern NFAs um Speicher.
- PDAs akzeptieren nicht mit Endzuständen, sondern mit leerem Keller.
- Die von PDAs akzeptierten Sprachen sind genau die kontextfreien Sprachen.

Weitere Themen zu kontextfreien Sprachen und PDAs

- Mit dem **CYK-Algorithmus** (nach Cocke, Younger und Kasami) kann man für eine Grammatik G in CNF und ein Wort w in Zeit $O(|w|^3)$ entscheiden, ob $w \in \mathcal{L}(G)$.

Weitere Themen zu kontextfreien Sprachen und PDAs

- Mit dem **CYK-Algorithmus** (nach Cocke, Younger und Kasami) kann man für eine Grammatik G in CNF und ein Wort w in Zeit $O(|w|^3)$ entscheiden, ob $w \in \mathcal{L}(G)$.
- In der **Greibach-Normalform** für kontextfreie Sprachen haben alle Regeln die Form $A \rightarrow aB_1B_2 \dots B_k$ ($k \geq 0$) oder $S \rightarrow \varepsilon$ mit Startsymbol S .

Weitere Themen zu kontextfreien Sprachen und PDAs

- Mit dem **CYK-Algorithmus** (nach Cocke, Younger und Kasami) kann man für eine Grammatik G in CNF und ein Wort w in Zeit $O(|w|^3)$ entscheiden, ob $w \in \mathcal{L}(G)$.
- In der **Greibach-Normalform** für kontextfreie Sprachen haben alle Regeln die Form $A \rightarrow aB_1B_2 \dots B_k$ ($k \geq 0$) oder $S \rightarrow \varepsilon$ mit Startsymbol S .
- **Deterministische Kellerautomaten** haben die Einschränkung, dass für $z \in Z, a \in \Sigma, A \in \Gamma$ gilt $|\delta(z, a, A)| + |\delta(z, \varepsilon, A)| \leq 1$. Zudem akzeptieren sie nicht mit leerem Keller, sondern mit **Endzuständen**.

Weitere Themen zu kontextfreien Sprachen und PDAs

- Mit dem **CYK-Algorithmus** (nach Cocke, Younger und Kasami) kann man für eine Grammatik G in CNF und ein Wort w in Zeit $O(|w|^3)$ entscheiden, ob $w \in \mathcal{L}(G)$.
- In der **Greibach-Normalform** für kontextfreie Sprachen haben alle Regeln die Form $A \rightarrow aB_1B_2 \dots B_k$ ($k \geq 0$) oder $S \rightarrow \varepsilon$ mit Startsymbol S .
- **Deterministische Kellerautomaten** haben die Einschränkung, dass für $z \in Z, a \in \Sigma, A \in \Gamma$ gilt $|\delta(z, a, A)| + |\delta(z, \varepsilon, A)| \leq 1$. Zudem akzeptieren sie nicht mit leerem Keller, sondern mit **Endzuständen**.
- Die Klasse der von deterministischen PDAs akzeptierten Sprachen heisst **deterministisch kontextfreie Sprachen**. Sie ist echte Obermenge der regulären Sprachen und echte Teilmenge der kontextfreien Sprachen.