Theorie der Informatik

7. Formale Sprachen und Grammatiken

Malte Helmert Gabriele Röger

Universität Basel

16. März 2015

Einführung

Beispiel: Aussagenlogische Formeln

Aus dem Logikteil:

Definition (Syntax der Aussagenlogik)

Sei A eine Menge von atomaren Aussagen. Die Menge der aussagenlogischen Formeln (über A) ist induktiv wie folgt definiert:

- Jedes Atom $a \in A$ ist eine aussagenlogische Formel über A.
- Ist ϕ eine aussagenlogische Formel über A, dann auch die Negation $\neg\phi$.
- Sind ϕ und ψ aussagenlogische Formeln über A, dann ist es auch die Konjunktion $(\phi \wedge \psi)$.
- Sind ϕ und ψ aussagenlogische Formeln über A, dann ist es auch die Disjunktion $(\phi \vee \psi)$.

Beispiel: Aussagenlogische Formeln

Sei S_A die Menge aller aussagenlogischen Formeln über A.

Solche Mengen von Zeichenketten (oder Wörtern) nennt man Sprachen.

Gesucht: Allgemeine Konzepte, um solche (oftmals unendliche) Sprachen mit endlichen Beschreibungen zu definieren

- heute: Grammatiken
- nächste Kapitel zusätzlich: Automaten

Beispiel: Aussagenlogische Formeln

Beispiel (Grammatik für $S_{\{a,b,c\}}$)

Grammatikvariablen $\{F, A, N, K, D\}$ mit Startvariable F, Terminalsymbole $\{a, b, c, \neg, \wedge, \vee, (,)\}$ und Regeln

$$\begin{array}{lll} F \rightarrow A & A \rightarrow a & N \rightarrow \neg F \\ F \rightarrow N & A \rightarrow b & K \rightarrow (F \wedge F) \\ F \rightarrow K & A \rightarrow c & D \rightarrow (F \vee F) \\ F \rightarrow D & & \end{array}$$

Beginne mit F und ersetze schrittweise eine linke Regelseite durch eine rechte Regelseite bis keine Variablen mehr enthalten sind:

$$F \Rightarrow N \Rightarrow \neg F \Rightarrow \neg D \Rightarrow \neg(F \vee F) \Rightarrow \neg(A \vee F) \Rightarrow \neg(b \vee F) \\ \Rightarrow \neg(b \vee A) \Rightarrow \neg(b \vee c)$$

Alphabete und formale Sprachen

Alphabete und formale Sprachen

Definition (Alphabete, Wörter und formale Sprache)

Ein Alphabet Σ ist eine endliche, nicht-leere Menge von Zeichen (oder Symbolen).

Beispiel

$\Sigma = \{a, b\}$

Alphabete und formale Sprachen

Definition (Alphabete, Wörter und formale Sprache)

Ein Alphabet Σ ist eine endliche, nicht-leere Menge von Zeichen (oder Symbolen).

Die Menge Σ^* aller Wörter über Σ enthält alle endlichen Folgen von Elementen aus Σ. Das leere Wort (die leere Elementfolge) wird dabei mit ε bezeichnet.

Beispiel

$\Sigma = \{a, b\}$
$\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, \dots\}$

Alphabete und formale Sprachen

Definition (Alphabete, Wörter und formale Sprache)

Ein Alphabet Σ ist eine endliche, nicht-leere Menge von Zeichen (oder Symbolen).

Die Menge Σ^* aller Wörter über Σ enthält alle endlichen Folgen von Elementen aus Σ. Das leere Wort (die leere Elementfolge) wird dabei mit ε bezeichnet.

Für ein Wort w bezeichnet $|w|$ seine Länge.

Beispiel

$\Sigma = \{a, b\}$
$\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, \dots\}$
$|aba| = 3, |b| = 1, |\varepsilon| = 0$

Alphabete und formale Sprachen

Definition (Alphabete, Wörter und formale Sprache)

Ein Alphabet Σ ist eine endliche, nicht-leere Menge von Zeichen (oder Symbolen).

Die Menge Σ^* aller Wörter über Σ enthält alle endlichen Folgen von Elementen aus Σ. Das leere Wort (die leere Elementfolge) wird dabei mit ε bezeichnet.

Für ein Wort w bezeichnet $|w|$ seine Länge.

Eine formale Sprache ist eine Teilmenge von Σ^*.

Beispiel

$\Sigma = \{a, b\}$
$\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, \dots\}$
$|aba| = 3, |b| = 1, |\varepsilon| = 0$

Sprachen: Beispiele

Beispiel (Sprachen über $\Sigma = \{a, b\}$)

- $S_1 = \{a, aa, aaa, aaaa, \dots\}$

Sprachen: Beispiele

Beispiel (Sprachen über $\Sigma = \{a, b\}$)

- $S_1 = \{a, aa, aaa, aaaa, \ldots\}$
- $S_2 = \Sigma^*$

Sprachen: Beispiele

Beispiel (Sprachen über $\Sigma = \{a, b\}$)

- $S_1 = \{a, aa, aaa, aaaa, \ldots\}$
- $S_2 = \Sigma^*$
- $S_3 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} = \{\varepsilon, ab, aabb, aaabbb, \ldots\}$

Sprachen: Beispiele

Beispiel (Sprachen über $\Sigma = \{a, b\}$)

- $S_1 = \{a, aa, aaa, aaaa, \dots\}$
- $S_2 = \Sigma^*$
- $S_3 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} = \{\varepsilon, ab, aabb, aaabbb, \dots\}$
- $S_4 = \{\varepsilon\}$

Sprachen: Beispiele

Beispiel (Sprachen über $\Sigma = \{a, b\}$)

- $S_1 = \{a, aa, aaa, aaaa, \dots\}$
- $S_2 = \Sigma^*$
- $S_3 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} = \{\varepsilon, ab, aabb, aaabbb, \dots\}$
- $S_4 = \{\varepsilon\}$
- $S_5 = \emptyset$

Sprachen: Beispiele

Beispiel (Sprachen über $\Sigma = \{a, b\}$)

- $S_1 = \{a, aa, aaa, aaaa, \dots\}$
- $S_2 = \Sigma^*$
- $S_3 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} = \{\varepsilon, ab, aabb, aaabbb, \dots\}$
- $S_4 = \{\varepsilon\}$
- $S_5 = \emptyset$
- $S_6 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enhält doppelt soviele } a \text{ wie } b\}$
  $= \{\varepsilon, aab, aba, baa, \dots\}$

Sprachen: Beispiele

Beispiel (Sprachen über $\Sigma = \{a, b\}$)

- $S_1 = \{a, aa, aaa, aaaa, \dots\}$
- $S_2 = \Sigma^*$
- $S_3 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} = \{\varepsilon, ab, aabb, aaabbb, \dots\}$
- $S_4 = \{\varepsilon\}$
- $S_5 = \emptyset$
- $S_6 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enhält doppelt soviele } a \text{ wie } b\}$
  $= \{\varepsilon, aab, aba, baa, \dots\}$
- $S_7 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| = 3\}$
  $= \{aaa, aab, aba, baa, bba, bab, abb, bbb\}$

Fragen

Fragen?

Grammatiken

Grammatiken

Definition (Grammatik)

Eine Grammatik ist ein 4-Tupel (Σ, V, P, S) mit

1. Σ endliches Terminalalphabet,
2. V endliche Menge von Variablen (mit $V \cap \Sigma = \emptyset$),
3. $P \subseteq (V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^*$ endliche Menge von Regeln, und
4. $S \in V$ Startvariable.

Regelmengen

Was genau bedeutet $P \subseteq (V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^*$?

- $(V \cup \Sigma)^*$: Alle Wörter über $(V \cup \Sigma)$
- $(V \cup \Sigma)^+$: Alle nicht-leeren Wörter über $(V \cup \Sigma)$
  Allgemein für Menge X: $X^+ = X^* \setminus \{\varepsilon\}$
- $\times$: kartesisches Produkt
- $(V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^*$: Menge aller Paare (x, y), wobei x nicht-leeres Wort über $(V \cup \Sigma)$ und y Wort über $(V \cup \Sigma)$
- Statt (x, y) schreiben wir Regeln meist in der Form $x \rightarrow y$.

Regeln: Beispiele

Beispiel

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $V = \{X, Y, Z\}$.

Folgende Regeln sind in $(V \cup \Sigma)^{+} \times (V \cup \Sigma)^{*}$:

$$
\begin{aligned}
X &\rightarrow XaY \\
Yb &\rightarrow a \\
XY &\rightarrow \varepsilon \\
XYZ &\rightarrow abc \\
abc &\rightarrow XYZ
\end{aligned}
$$

Ableitung

Definition (Ableitung)

Sei (Σ, V, P, S) eine Grammatik. Ein Wort $v \in (V \cup \Sigma)^*$ kann von Wort $u \in (V \cup \Sigma)^+$ abgeleitet werden ($u \Rightarrow v$), falls

1. $u = xyz$, $v = xy'z$ mit $x, z \in (V \cup \Sigma)^*$ und
2. es existiert eine Regel $y \rightarrow y' \in P$.

Wir schreiben: $u \Rightarrow^* v$ falls v in endlich vielen Schritten (d.h. durch die Anwendung von n Regeln für $n \in \mathbb{N}_0$) von u abgeleitet werden kann.

Ableitung: Mehrdeutigkeit

Beispiel

$G = (\{a, b, c\}, \{S, A, B\}, P, S)$, wobei P folgende Regeln enthält:

$$S \rightarrow aB \qquad A \rightarrow ab$$
$$S \rightarrow Ac \qquad B \rightarrow bc$$

Wort abc kann von S abgeleitet werden: $S \Rightarrow aB \Rightarrow abc$

Ableitung: Mehrdeutigkeit

Beispiel

$G = (\{a, b, c\}, \{S, A, B\}, P, S)$, wobei P folgende Regeln enthält:

$$S \rightarrow aB \qquad A \rightarrow ab$$
$$S \rightarrow Ac \qquad B \rightarrow bc$$

Wort abc kann von S abgeleitet werden: $S \Rightarrow aB \Rightarrow abc$
Alternative Ableitung: $S \Rightarrow Ac \Rightarrow abc$

Ableitung: Mehrdeutigkeit

Beispiel

$G = (\{a, b, c\}, \{S, A, B\}, P, S)$, wobei P folgende Regeln enthält:

$$\begin{aligned} S &\to aB & \qquad A &\to ab \\ S &\to Ac & \qquad B &\to bc \end{aligned}$$

Wort *abc* kann von S abgeleitet werden: $S \Rightarrow aB \Rightarrow abc$
Alternative Ableitung: $S \Rightarrow Ac \Rightarrow abc$

- Es kann verschiedene Ableitungen für ein Wort geben.
- Dies gilt selbst, wenn man immer nur die erste vorkommende Variable ersetzt (sogenannte Linksableitung).

Erzeugte Sprache einer Grammatik

Definition (Sprache)

Die von einer Grammatik $G = (\Sigma, V, P, S)$ erzeugte Sprache

$$\mathcal{L}(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* w\}$$

ist die Menge aller Wörter aus Σ^*, die von S
mit endlich vielen Regelanwendungen abgeleitet werden können.

Grammatiken

Beispiele: Tafel

Fragen

Fragen?

Chomsky-Hierarchie

Chomsky-Hierarchie

Grammatiken werden in die Chomsky-Hierarchie eingegliedert.

Definition (Chomsky-Hierarchie)

- Jede Grammatik ist vom Typ 0 (beliebige Regeln erlaubt).
- Grammatik ist vom Typ 1 (kontextsensitiv), falls für alle Regeln $w_1 \to w_2$ gilt: $|w_1| \leq |w_2|$.
- Grammatik ist vom Typ 2 (kontextfrei), falls für alle Regeln $w_1 \to w_2$ gilt: $w_1 \in V$ (einzelne Variable).
- Grammatik ist vom Typ 3 (regulär), falls zusätzlich $w_2 \in \Sigma \cup \Sigma V$.

Spezialfall: Regel $S \to \varepsilon$ ist immer erlaubt, wenn S Startsymbol ist und auf keiner rechten Seite irgendeiner Regel auftritt.

Chomsky-Hierarchie

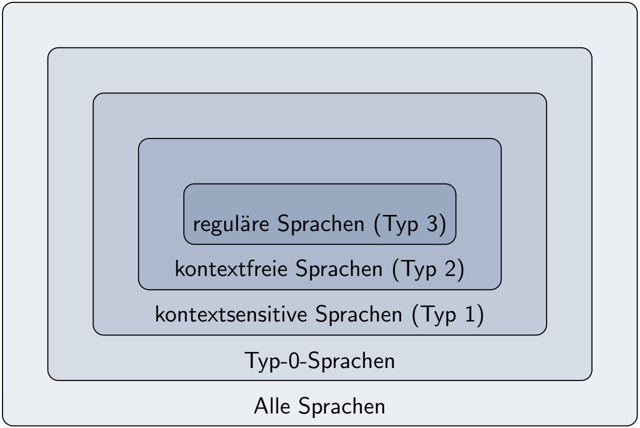
Beispiele: Tafel

Chomsky-Hierarchie

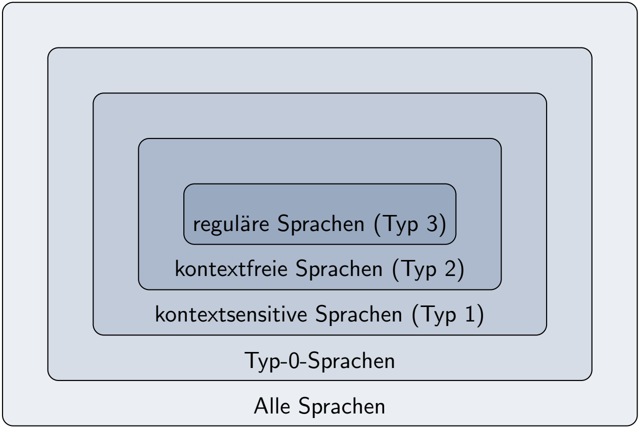
Definition (Typ-0–3 Sprachen)

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heisst vom Typ 0 (Typ 1, Typ 2, Typ 3), falls es eine Typ-0- (Typ-1-, Typ-2-, Typ-3-) Grammatik G gibt mit $\mathcal{L}(G) = L$.

Chomsky-Hierarchie



Chomsky-Hierarchie



Nicht alle Sprachen sind durch Grammatiken beschreibbar.

Fragen

Fragen?

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Sprachen sind Mengen von Zeichenketten.
- Grammatiken sind eine Möglichkeit Sprachen zu beschreiben.
- Erzeugte Sprache einer Grammatik ist die Menge der ableitbaren variablenfreien Wörter.
- Chomsky-Hierarchie teilt Grammatiken in Stufen unterschiedlicher Erzeugungsmächtigkeit ein.

Zusammenfassung

- Sprachen sind Mengen von Zeichenketten.
- Grammatiken sind eine Möglichkeit Sprachen zu beschreiben.
- Erzeugte Sprache einer Grammatik ist die Menge der ableitbaren variablenfreien Wörter.
- Chomsky-Hierarchie teilt Grammatiken in Stufen unterschiedlicher Erzeugungsmächtigkeit ein.

Nächstes Kapitel

- Mehr zu regulären Sprachen
- Automaten als alternative Darstellungsform von Sprachen