# Theorie der Informatik

## 6. Prädikatenlogik

Malte Helmert Gabriele Röger

Universität Basel

11./16. März 2015

# Motivation

# Grenzen der Aussagenlogik

Gruppenaxiome für $(G, \circ, e)$:

1. Für alle $x, y, z \in G$ gilt $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.
2. Für alle $x \in G$ gilt $x \circ e = x$.
3. Für alle $x \in G$ gibt es ein $y \in G$ mit $x \circ y = e$.

# Grenzen der Aussagenlogik

Gruppenaxiome für $(G, \circ, e)$:

1. Für alle $x, y, z \in G$ gilt $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.
2. Für alle $x \in G$ gilt $x \circ e = x$.
3. Für alle $x \in G$ gibt es ein $y \in G$ mit $x \circ y = e$.

Können wir in Aussagenlogik nicht ausdrücken:

- Objekte $x, y, z$ aus $G$
- Objektreferenzierung $(x \circ y)$ mit Funktion $\circ$
- Gleichheit $=$
- „Für alle“, „es gibt“

# Grenzen der Aussagenlogik

Gruppenaxiome für $(G, \circ, e)$:

1. Für alle $x, y, z \in G$ gilt $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.
2. Für alle $x \in G$ gilt $x \circ e = x$.
3. Für alle $x \in G$ gibt es ein $y \in G$ mit $x \circ y = e$.

Können wir in Aussagenlogik nicht ausdrücken:

- Objekte $x, y, z$ aus $G$
- Objektreferenzierung $(x \circ y)$ mit Funktion $\circ$
- Gleichheit $=$
- „Für alle“, „es gibt“

$\triangleright$ Benötigen ausdrucksstärkere Logik
$\rightsquigarrow$ Prädikatenlogik

# Syntax der Prädikatenlogik

# Syntax: Bestandteile

- Signaturen definieren erlaubte Symbole.
  Analogie: Variablenmenge $A$ in Aussagenlogik
- Terme werden von Semantik mit Objekten assoziiert.
  Keine Analogie in Aussagenlogik
- Formeln werden von Semantik mit Wahrheitswerten (wahr oder falsch) assoziiert.
  Analogie: Formeln in Aussagenlogik

# Signaturen: Definition

## Definition (Signatur)

Eine Signatur (der Prädikatenlogik) ist ein 4-Tupel $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ aus folgenden vier disjunkten Mengen:

- eine endliche oder abzählbare Menge $\mathcal{V}$ von Variablensymbolen
- eine endliche oder abzählbare Menge $\mathcal{K}$ von Konstantensymbolen
- eine endliche oder abzählbare Menge $\mathcal{F}$ von Funktionssymbolen
- eine endliche oder abzählbare Menge $\mathcal{P}$ von Prädikatsymbolen (oder Relationssymbolen)

Jedes Funktionssymbol $\mathsf{f} \in \mathcal{F}$ und Prädikatsymbol $\mathsf{P} \in \mathcal{P}$ hat eine assoziierte Stelligkeit $\mathit{St}(\mathsf{f}), \mathit{St}(\mathsf{P}) \in \mathbb{N}_1$ (Anzahl von Argumenten).

# Signaturen: Terminologie und Konventionen

Terminologie

- *k*-stelliges (Funktions- oder Prädikat-) symbol: Symbol s mit Stelligkeit $St(\mathrm{s}) = k$.
- Auch: unär, binär, ternär

Konventionen (in dieser Vorlesung):

- Variablensymbole werden *kursiv* dargestellt, andere Symbole aufrecht.
- Prädikatsymbole beginnen mit Grossbuchstaben, andere Symbole mit Kleinbuchstaben

# Signaturen: Beispiele

## Beispiel: Arithmetik

- $\mathcal{V} = \{x, y, z, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$
- $\mathcal{K} = \{\text{null}, \text{eins}\}$
- $\mathcal{F} = \{\text{summe}, \text{produkt}\}$
- $\mathcal{P} = \{\text{Positiv}, \text{Quadratzahl}\}$

$St(\text{summe}) = St(\text{produkt}) = 2,\ St(\text{Positiv}) = St(\text{Quadratzahl}) = 1$

# Signaturen: Beispiele

## Beispiel: Genealogie

- $\mathcal{V} = \{x, y, z, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$
- $\mathcal{K} = \{\text{roger-federer}, \text{lisa-simpson}\}$
- $\mathcal{F} = \emptyset$
- $\mathcal{P} = \{\text{Weiblich}, \text{Männlich}, \text{Elternteil}\}$

$St(\text{Weiblich}) = St(\text{Männlich}) = 1,\ St(\text{Elternteil}) = 2$

# Terme: Definition

## Definition (Term)

Sei $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ eine Signatur.
Ein Term (über $\mathcal{S}$) ist induktiv nach folgenden Regeln konstruiert:

- Jedes Variablensymbol $v \in \mathcal{V}$ ist ein Term.
- Jedes Konstantensymbol $\mathsf{k} \in \mathcal{K}$ ist ein Term.
- Sind $t_1, \dots, t_k$ Terme und ist $\mathsf{f} \in \mathcal{F}$ ein Funktionssymbol der Stelligkeit $k$, dann ist $\mathsf{f}(t_1, \dots, t_k)$ ein Term.

# Terme: Definition

**Definition (Term)**

Sei $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ eine Signatur.
Ein Term (über $\mathcal{S}$) ist induktiv nach folgenden Regeln konstruiert:

- Jedes Variablensymbol $v \in \mathcal{V}$ ist ein Term.
- Jedes Konstantensymbol $\mathsf{k} \in \mathcal{K}$ ist ein Term.
- Sind $t_1, \dots, t_k$ Terme und ist $\mathsf{f} \in \mathcal{F}$ ein Funktionssymbol der Stelligkeit $k$, dann ist $\mathsf{f}(t_1, \dots, t_k)$ ein Term.

Beispiele:

- $x_4$
- lisa-simson
- $\mathsf{summe}(x_3, \mathsf{produkt}(\mathsf{eins}, x_5))$

# Formeln: Definition

## Definition (Formel)

Für eine Signatur $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ist die Menge der prädikatenlogischen Formeln (über $\mathcal{S}$) induktiv wie folgt definiert:

- Sind $t_1, \dots, t_k$ Terme (über $\mathcal{S}$) und ist $\mathrm{P} \in \mathcal{P}$ ein $k$-stelliges Prädikatsymbol, dann ist die atomare Formel (oder das Atom) $\mathrm{P}(t_1, \dots, t_k)$ eine Formel über $\mathcal{S}$.
- Sind $t_1$ und $t_2$ Terme (über $\mathcal{S}$), dann ist die Identität $(t_1 = t_2)$ eine Formel über $\mathcal{S}$.
- Ist $x \in \mathcal{V}$ ein Variablensymbol und $\varphi$ eine Formel über $\mathcal{S}$, dann sind die Allquantifizierung $\forall x\, \varphi$ und die Existenzquantifizierung $\exists x\, \varphi$ Formeln über $\mathcal{S}$.
- Ist $\varphi$ eine Formel über $\mathcal{S}$, dann auch die Negation $\neg\varphi$.
- Sind $\varphi$ und $\psi$ Formeln über $\mathcal{S}$, dann auch die Konjunktion $(\varphi \wedge \psi)$ und die Disjunktion $(\varphi \vee \psi)$.

# Formeln: Beispiele

## Beispiele: Arithmetik und Genealogie

- $\text{Positiv}(x_2)$
- $\forall x\, (\neg\text{Quadratzahl}(x) \vee \text{Positiv}(x))$
- $\exists x_3\, (\text{Quadratzahl}(x_3) \wedge \neg\text{Positiv}(x_3))$
- $\forall x\, (x = y)$
- $\forall x\, (\text{summe}(x, x) = \text{produkt}(x, \text{eins}))$
- $\forall x \exists y\, (\text{summe}(x, y) = \text{null})$
- $\forall x \exists y\, (\text{Elternteil}(y, x) \wedge \text{Weiblich}(y))$

Terminologie: Die Symbole $\forall$ und $\exists$ heissen Quantoren.

# Abkürzungen und Klammerung per Konvention

Abkürzungen

- $(\varphi \to \psi)$ ist Abkürzung für $(\neg\varphi \vee \psi)$.
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ist Abkürzung für $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$.
- Sequenzen von gleichen Quantoren kann man zur Abkürzung zusammenfassen. Zum Beispiel:
  - $\forall x \forall y \forall z\, \varphi \rightsquigarrow \forall xyz\, \varphi$
  - $\exists x \exists y \exists z\, \varphi \rightsquigarrow \exists xyz\, \varphi$
  - $\forall w \exists x \exists y \forall z\, \varphi \rightsquigarrow \forall w \exists xy \forall z\, \varphi$

# Abkürzungen und Klammerung per Konvention

Abkürzungen

- $(\varphi \to \psi)$ ist Abkürzung für $(\neg\varphi \lor \psi)$.
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ist Abkürzung für $((\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi))$.
- Sequenzen von gleichen Quantoren kann man zur Abkürzung zusammenfassen. Zum Beispiel:
  - $\forall x \forall y \forall z\, \varphi \rightsquigarrow \forall xyz\, \varphi$
  - $\exists x \exists y \exists z\, \varphi \rightsquigarrow \exists xyz\, \varphi$
  - $\forall w \exists x \exists y \forall z\, \varphi \rightsquigarrow \forall w \exists xy \forall z\, \varphi$

Klammerung per Konvention

- analog zur Aussagenlogik
- Quantoren $\forall$ und $\exists$ binden stärker als alles andere.
- Beispiel: $\forall x\, P(x) \to Q(x)$ entspricht $(\forall x\, P(x) \to Q(x))$,
  nicht $\forall x\, (P(x) \to Q(x))$.

# Fragen

Fragen?

# Semantik der Prädikatenlogik

# Semantik: Motivation

- Interpretation in der Aussagenlogik: Wahrheitsbelegung für die Aussagenvariablen
- Gibt keine Aussagenvariablen in Prädikatenlogik
- Stattdessen: Interpretation legt Bedeutung der Konstanten-, Funktions- und Prädikatsymbole fest.
- Bedeutung von Variablensymbolen nicht durch Interpretation festgelegt, sondern durch gesonderte Variablenzuweisung.

# Interpretationen und Variablenzuweisungen

Sei $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ eine Signatur.

## Definition (Interpretation, Variablenzuweisung)

Eine Interpretation (für $\mathcal{S}$) ist ein Paar $\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ mit folgenden Komponenten:

- eine nichtleere Menge $U$ genannt Universum (oder Grundmenge) und
- eine Funktion $\cdot^{\mathcal{I}}$, die den Konstanten-, Funktions- und Prädikatsymbolen eine Bedeutung zuweist:
  - $\mathsf{k}^{\mathcal{I}} \in U$ für Konstantensymbole $\mathsf{k} \in \mathcal{K}$
  - $\mathsf{f}^{\mathcal{I}} : U^k \to U$ für $k$-stellige Funktionssymbole $\mathsf{f} \in \mathcal{F}$
  - $\mathsf{P}^{\mathcal{I}} \subseteq U^k$ für $k$-stellige Prädikatsymbole $\mathsf{P} \in \mathcal{P}$

Eine Variablenzuweisung (für $\mathcal{S}$ und Universum $U$) ist eine Funktion $\alpha : \mathcal{V} \to U$.

# Interpretationen und Variablenzuweisungen: Beispiel

## Beispiel

Signatur: $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ mit $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$,
$\mathcal{K} = \{\text{null}, \text{eins}\}$, $\mathcal{F} = \{\text{summe}, \text{produkt}\}$, $\mathcal{P} = \{\text{Quadratzahl}\}$
$St(\text{summe}) = St(\text{produkt}) = 2$, $St(\text{Quadratzahl}) = 1$

# Interpretationen und Variablenzuweisungen: Beispiel

## Beispiel

Signatur: $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ mit $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$,
$\mathcal{K} = \{\text{null}, \text{eins}\}$, $\mathcal{F} = \{\text{summe}, \text{produkt}\}$, $\mathcal{P} = \{\text{Quadratzahl}\}$
$St(\text{summe}) = St(\text{produkt}) = 2$, $St(\text{Quadratzahl}) = 1$

$\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ mit

- $U = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$
- $\text{null}^{\mathcal{I}} = u_0$
- $\text{eins}^{\mathcal{I}} = u_1$
- $\text{summe}^{\mathcal{I}}(u_i, u_j) = u_{(i+j) \bmod 7}$ für alle $i, j \in \{0, \dots, 6\}$
- $\text{produkt}^{\mathcal{I}}(u_i, u_j) = u_{(i \cdot j) \bmod 7}$ für alle $i, j \in \{0, \dots, 6\}$
- $\text{Quadratzahl}^{\mathcal{I}} = \{u_0, u_1, u_2, u_4\}$

$\alpha = \{x \mapsto u_5, y \mapsto u_5, z \mapsto u_0\}$

# Semantik: informell

Beispiel: $(\forall x(\mathrm{Block}(x) \rightarrow \mathrm{Rot}(x)) \land \mathrm{Block}(\mathrm{a}))$
„Für alle Objekte $x$: wenn $x$ ein Block ist, dann ist $x$ rot.
Zudem ist das Objekt, das mit a bezeichnet wird, ein Block.“

- Terme werden als Objekte interpretiert.
- Unäre Prädikate bezeichnen Eigenschaften von Objekten (ein Block sein, rot sein, eine Quadratzahl sein, ...)
- Allgemeine Prädikate beschreiben Beziehungen zwischen Objekten (das Kind von jemandem sein, einen gemeinsamen Teiler haben, ...)
- Allquantifizierte Formeln („$\forall$“) sind wahr, wenn sie für alle Objekte im Universum gelten.
- Existenzquantifizierte Formeln („$\exists$“) sind wahr, wenn sie für mindestens ein Objekt im Universum gelten.

# Interpretation von Termen

Sei $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ eine Signatur.

## Definition (Interpretation eines Terms)

Sei $\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ eine Interpretation für $\mathcal{S}$,
und sei $\alpha$ eine Variablenzuweisung für $\mathcal{S}$ und Universum $U$.

Sei $t$ ein Term über $\mathcal{S}$.
Die Interpretation von $t$ unter $\mathcal{I}$ und $\alpha$, symbolisch $t^{\mathcal{I},\alpha}$, ist ein Element des Universums $U$ und folgendermassen definiert:

- Wenn $t = x$ mit $x \in \mathcal{V}$ ($t$ ist ein Variablenterm):
  $x^{\mathcal{I},\alpha} = \alpha(x)$
- Wenn $t = \mathsf{k}$ mit $\mathsf{k} \in \mathcal{K}$ ($t$ ist ein Konstantenterm):
  $\mathsf{k}^{\mathcal{I},\alpha} = \mathsf{k}^{\mathcal{I}}$
- Wenn $t = \mathsf{f}(t_1, \dots, t_k)$ ($t$ ist ein Funktionsterm):
  $\mathsf{f}(t_1, \dots, t_k)^{\mathcal{I},\alpha} = \mathsf{f}^{\mathcal{I}}(t_1^{\mathcal{I},\alpha}, \dots, t_k^{\mathcal{I},\alpha})$

# Interpretation von Termen: Beispiel

## Beispiel

Signatur: $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$
mit $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{K} = \{\mathsf{null}, \mathsf{eins}\}$, $\mathcal{F} = \{\mathsf{summe}, \mathsf{produkt}\}$,
$St(\mathsf{summe}) = St(\mathsf{produkt}) = 2$

# Interpretation von Termen: Beispiel

## Beispiel

Signatur: $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$
mit $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{K} = \{\text{null}, \text{eins}\}$, $\mathcal{F} = \{\text{summe}, \text{produkt}\}$,
$St(\text{summe}) = St(\text{produkt}) = 2$

$\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ mit

- $U = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$
- $\text{null}^{\mathcal{I}} = u_0$
- $\text{eins}^{\mathcal{I}} = u_1$
- $\text{summe}^{\mathcal{I}}(u_i, u_j) = u_{(i+j) \bmod 7}$ für alle $i, j \in \{0, \ldots, 6\}$
- $\text{produkt}^{\mathcal{I}}(u_i, u_j) = u_{(i \cdot j) \bmod 7}$ für alle $i, j \in \{0, \ldots, 6\}$

$\alpha = \{x \mapsto u_5, y \mapsto u_5, z \mapsto u_0\}$

# Interpretation von Termen: Beispiel (Forts.)

## Beispiel (Forts.)

- $\mathsf{null}^{\mathcal{I},\alpha} =$

- $y^{\mathcal{I},\alpha} =$

- $\mathsf{summe}(x, y)^{\mathcal{I},\alpha} =$

- $\mathsf{produkt}(\mathsf{eins}, \mathsf{summe}(x, \mathsf{null}))^{\mathcal{I},\alpha} =$

# Semantik prädikatenlogischer Formeln

Sei $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ eine Signatur.

## Definition (Formel ist erfüllt oder wahr)

Sei $\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ eine Interpretation für $\mathcal{S}$, und
sei $\alpha$ eine Variablenzuweisung für $\mathcal{S}$ und Grundmenge $U$.
Wir sagen $\mathcal{I}$ und $\alpha$ erfüllen eine prädikatenlogische Formel $\varphi$ (auch: $\varphi$ ist wahr unter $\mathcal{I}$ und $\alpha$), symbolisch: $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$,
entsprechend der folgenden induktiven Regeln:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}, \alpha \models \mathsf{P}(t_1, \ldots, t_k) \quad & \text{gdw } \langle t_1^{\mathcal{I},\alpha}, \ldots, t_k^{\mathcal{I},\alpha} \rangle \in \mathsf{P}^{\mathcal{I}} \\
\mathcal{I}, \alpha \models (t_1 = t_2) \quad & \text{gdw } t_1^{\mathcal{I},\alpha} = t_2^{\mathcal{I},\alpha} \\
\mathcal{I}, \alpha \models \neg\varphi \quad & \text{gdw } \mathcal{I}, \alpha \not\models \varphi \\
\mathcal{I}, \alpha \models (\varphi \land \psi) \quad & \text{gdw } \mathcal{I}, \alpha \models \varphi \text{ und } \mathcal{I}, \alpha \models \psi \\
\mathcal{I}, \alpha \models (\varphi \lor \psi) \quad & \text{gdw } \mathcal{I}, \alpha \models \varphi \text{ oder } \mathcal{I}, \alpha \models \psi
\end{aligned}
$$

...

# Semantik prädikatenlogischer Formeln

Sei $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ eine Signatur.

## Definition (Formel ist erfüllt oder wahr)

...

$$\mathcal{I}, \alpha \models \forall x \varphi \quad \text{gdw } \mathcal{I}, \alpha[x := u] \models \varphi \text{ für alle } u \in U$$

$$\mathcal{I}, \alpha \models \exists x \varphi \quad \text{gdw } \mathcal{I}, \alpha[x := u] \models \varphi \text{ für mindestens ein } u \in U$$

wobei $\alpha[x := u]$ die gleiche Variablenbelegung ist wie $\alpha$, ausser dass sie der Variable $x$ den Wert $u$ zuweist.
Formal:

$$(\alpha[x := u])(z) = \begin{cases} u & \text{falls } z = x \\ \alpha(z) & \text{falls } z \neq x \end{cases}$$

# Semantik: Beispiel

## Beispiel

Signatur: $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$
mit $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{K} = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$, $\mathcal{F} = \emptyset$, $\mathcal{P} = \{\mathsf{Block}, \mathsf{Rot}\}$,
$St(\mathsf{Block}) = St(\mathsf{Rot}) = 1$.

# Semantik: Beispiel

## Beispiel

Signatur: $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$
mit $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{K} = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$, $\mathcal{F} = \emptyset$, $\mathcal{P} = \{\mathsf{Block}, \mathsf{Rot}\}$,
$St(\mathsf{Block}) = St(\mathsf{Rot}) = 1$.

$\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ mit

- $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$
- $\mathsf{a}^{\mathcal{I}} = u_1$
- $\mathsf{b}^{\mathcal{I}} = u_3$
- $\mathsf{Block}^{\mathcal{I}} = \{u_1, u_2\}$
- $\mathsf{Rot}^{\mathcal{I}} = \{u_1, u_2, u_3, u_5\}$

$\alpha = \{x \mapsto u_1, y \mapsto u_2, z \mapsto u_1\}$

# Semantik: Beispiel (Forts.)

## Beispiel (Forts.)

Fragen:

- $\mathcal{I}, \alpha \models (\mathsf{Block}(\mathsf{b}) \lor \neg\mathsf{Block}(\mathsf{b}))$?
- $\mathcal{I}, \alpha \models (\mathsf{Block}(x) \rightarrow (\mathsf{Block}(x) \lor \neg\mathsf{Block}(y)))$?
- $\mathcal{I}, \alpha \models (\mathsf{Block}(\mathsf{a}) \land \mathsf{Block}(\mathsf{b}))$?
- $\mathcal{I}, \alpha \models \forall x(\mathsf{Block}(x) \rightarrow \mathsf{Rot}(x))$?

# Semantik: Beispiel (Forts.)

## Beispiel (Forts.)

Fragen:

- $\mathcal{I}, \alpha \models (\mathsf{Block}(\mathsf{b}) \lor \neg\mathsf{Block}(\mathsf{b}))$?

# Semantik: Beispiel (Forts.)

## Beispiel (Forts.)

Fragen:

- $\mathcal{I}, \alpha \models (\mathsf{Block}(x) \rightarrow (\mathsf{Block}(x) \lor \neg\mathsf{Block}(y)))$?

# Semantik: Beispiel (Forts.)

## Beispiel (Forts.)

Fragen:

- $\mathcal{I}, \alpha \models (\mathsf{Block}(\mathsf{a}) \land \mathsf{Block}(\mathsf{b}))$?

# Semantik: Beispiel (Forts.)

## Beispiel (Forts.)

Fragen:

- $\mathcal{I}, \alpha \models \forall x(\mathsf{Block}(x) \to \mathsf{Rot}(x))$?

# Fragen

Fragen?

# Freie und gebundene Variablen

# Freie und gebundene Variablen: Motivation

Frage:

- Betrachte eine Signatur mit Variablensymbolen $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ und eine Interpretation $\mathcal{I}$.
- Welche Teile der Definition von $\alpha$ sind relevant, um zu entscheiden, ob $\mathcal{I}, \alpha \models (\forall x_4 (\mathsf{R}(x_4, x_2) \vee (\mathsf{f}(x_3) = x_4)) \vee \exists x_3 \mathsf{S}(x_3, x_2))$?

# Freie und gebundene Variablen: Motivation

Frage:

- Betrachte eine Signatur mit Variablensymbolen $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ und eine Interpretation $\mathcal{I}$.
- Welche Teile der Definition von $\alpha$ sind relevant, um zu entscheiden, ob $\mathcal{I}, \alpha \models (\forall x_4 (\mathsf{R}(x_4, x_2) \vee (\mathsf{f}(x_3) = x_4)) \vee \exists x_3 \mathsf{S}(x_3, x_2))$?
- $\alpha(x_1)$, $\alpha(x_5)$, $\alpha(x_6)$, $\alpha(x_7)$, ... sind irrelevant, da diese Variablensymbole in keiner Formel vorkommen.

# Freie und gebundene Variablen: Motivation

Frage:

- Betrachte eine Signatur mit Variablensymbolen $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ und eine Interpretation $\mathcal{I}$.
- Welche Teile der Definition von $\alpha$ sind relevant, um zu entscheiden, ob $\mathcal{I}, \alpha \models (\forall x_4(R(x_4, x_2) \vee (f(x_3) = x_4)) \vee \exists x_3 S(x_3, x_2))$?
- $\alpha(x_1)$, $\alpha(x_5)$, $\alpha(x_6)$, $\alpha(x_7)$, ... sind irrelevant, da diese Variablensymbole in keiner Formel vorkommen.
- $\alpha(x_4)$ ist auch nicht relevant: Die Variable kommt zwar in der Formel vor, aber alle Vorkommen sind von einem umgebenden Quantor gebunden.

# Freie und gebundene Variablen: Motivation

Frage:

- Betrachte eine Signatur mit Variablensymbolen $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ und eine Interpretation $\mathcal{I}$.
- Welche Teile der Definition von $\alpha$ sind relevant, um zu entscheiden, ob $\mathcal{I}, \alpha \models (\forall x_4 (\mathsf{R}(x_4, x_2) \lor (\mathsf{f}(x_3) = x_4)) \lor \exists x_3 \mathsf{S}(x_3, x_2))$?
- $\alpha(x_1)$, $\alpha(x_5)$, $\alpha(x_6)$, $\alpha(x_7)$, … sind irrelevant, da diese Variablensymbole in keiner Formel vorkommen.
- $\alpha(x_4)$ ist auch nicht relevant: Die Variable kommt zwar in der Formel vor, aber alle Vorkommen sind von einem umgebenden Quantor gebunden.
- $\rightsquigarrow$ nur Zuweisungen für freie Variablen $x_2$ und $x_3$ relevant

# Variablen eines Terms

**Definition (Variablen eines Terms)**

Sei $t$ ein Term. Die Menge der in $t$ vorkommenden Variablen, geschrieben $var(t)$, ist folgendermassen definiert:

- $var(x) = \{x\}$
  für Variablensymbole $x$
- $var(\mathsf{k}) = \emptyset$
  für Konstantensymbole k
- $var(\mathsf{f}(t_1, \dots, t_l)) = var(t_1) \cup \dots \cup var(t_l)$
  für Funktionsterme

Terminologie: Ein Term $t$ mit $var(t) = \emptyset$ heisst Grundterm.

Beispiel: $var(\mathsf{produkt}(x, \mathsf{summe}(\mathsf{k}, y))) =$

# Freie und gebundene Variablen einer Formel

## Definition (Freie Variablen)

Sei $\varphi$ eine logische Formel. Die Menge der freien Variables von $\varphi$, geschrieben $\mathit{frei}(\varphi)$, ist folgendermassen definiert:

- $\mathit{frei}(\mathrm{P}(t_1, \ldots, t_k)) = \mathit{var}(t_1) \cup \cdots \cup \mathit{var}(t_k)$
- $\mathit{frei}((t_1 = t_2)) = \mathit{var}(t_1) \cup \mathit{var}(t_2)$
- $\mathit{frei}(\neg\varphi) = \mathit{frei}(\varphi)$
- $\mathit{frei}((\varphi \land \psi)) = \mathit{frei}((\varphi \lor \psi)) = \mathit{frei}(\varphi) \cup \mathit{frei}(\psi)$
- $\mathit{frei}(\forall x\, \varphi) = \mathit{frei}(\exists x\, \varphi) = \mathit{frei}(\varphi) \setminus \{x\}$

Beispiel: $\mathit{frei}((\forall x_4(\mathrm{R}(x_4, x_2) \lor (\mathrm{f}(x_3) = x_4)) \lor \exists x_3 \mathrm{S}(x_3, x_2)))$

$=$

# Geschlossene Formeln/Sätze

Anmerkung: Sei $\varphi$ eine Formel und seien $\alpha$ und $\beta$ Variablenzuweisungen mit $\alpha(x) = \beta(x)$ für alle freien Variablen $x$ von $\varphi$. Dann gilt $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$ gdw. $\mathcal{I}, \beta \models \varphi$.

## Geschlossene Formeln/Sätze

Anmerkung: Sei $\varphi$ eine Formel und seien $\alpha$ und $\beta$ Variablenzuweisungen mit $\alpha(x) = \beta(x)$ für alle freien Variablen $x$ von $\varphi$. Dann gilt $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$ gdw. $\mathcal{I}, \beta \models \varphi$.

Insbesondere ist $\alpha$ vollkommen irrelevant, wenn $\mathit{frei}(\varphi) = \emptyset$.

# Geschlossene Formeln/Sätze

Anmerkung: Sei $\varphi$ eine Formel und seien $\alpha$ und $\beta$ Variablenzuweisungen mit $\alpha(x) = \beta(x)$ für alle freien Variablen $x$ von $\varphi$. Dann gilt $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$ gdw. $\mathcal{I}, \beta \models \varphi$.

Insbesondere ist $\alpha$ vollkommen irrelevant, wenn $\mathit{frei}(\varphi) = \emptyset$.

**Definition (Geschlossene Formeln/Sätze)**

Eine Formel $\varphi$ ohne freie Variablen (d. h., $\mathit{frei}(\varphi) = \emptyset$) wird geschlossene Formel oder Satz genannt.

Wenn $\varphi$ ein Satz ist, dann schreiben wir oft $\mathcal{I} \models \varphi$ statt $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$, da die Definition von $\alpha$ nicht beeinflusst, ob $\varphi$ unter $\mathcal{I}$ und $\alpha$ wahr ist oder nicht.

Formeln mit mindestens einer freien Variablen heissen offen.

# Geschlossene Formeln: Beispiele

Frage: Welche der folgenden Formeln sind Sätze?

- $(\mathrm{Block(b)} \vee \neg \mathrm{Block(b)})$
- $(\mathrm{Block}(x) \rightarrow (\mathrm{Block}(x) \vee \neg \mathrm{Block}(y)))$
- $(\mathrm{Block(a)} \wedge \mathrm{Block(b)})$
- $\forall x(\mathrm{Block}(x) \rightarrow \mathrm{Red}(x))$

# Fragen

Fragen?

# Eigenschaften von Formeln und Formelmengen

# Terminologie für Formeln

Die Terminologie, die wir für die Aussagenlogik eingeführt haben, gilt analog für die Prädikatenlogik:

- Interpretation $\mathcal{I}$ und Variablenzuweisung $\alpha$ bilden ein Modell der Formel $\varphi$, wenn $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$.
- Formel $\varphi$ ist erfüllbar, wenn $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$ für mindestens ein $\mathcal{I}, \alpha$.
- Formel $\varphi$ ist falsifizierbar, wenn $\mathcal{I}, \alpha \not\models \varphi$ für mindestens ein $\mathcal{I}, \alpha$
- Formel $\varphi$ ist gültig, wenn $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$ für alle $\mathcal{I}, \alpha$
- Formel $\varphi$ ist unerfüllbar, wenn $\mathcal{I}, \alpha \not\models \varphi$ für alle $\mathcal{I}, \alpha$
- Formel $\varphi$ impliziert Formula $\psi$, geschrieben $\varphi \models \psi$, wenn alle Modelle von $\varphi$ Modelle von $\psi$ sind.
- Formeln $\varphi$ und $\psi$ sind logisch äquivalent, geschrieben $\varphi \equiv \psi$, wenn sie die gleichen Modelle haben (äquivalent: wenn $\varphi \models \psi$ und $\psi \models \varphi$).

# Formelmengen: Semantik

**Definition (Formelmenge ist erfüllt oder wahr)**

Sei $\mathcal{S}$ eine Signatur, $\Phi$ eine Menge von Formeln über $\mathcal{S}$, $\mathcal{I}$ eine Interpretation für $\mathcal{S}$ und $\alpha$ eine Variablenzuweisung für $\mathcal{S}$ und das Universum von $\mathcal{I}$.

Wir sagen, dass $\mathcal{I}$ und $\alpha$ die Menge $\Phi$ erfüllen (auch: $\Phi$ ist wahr unter $\mathcal{I}$ und $\alpha$), symbolisch: $\mathcal{I}, \alpha \models \Phi$, wenn $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$.

# Terminologie für Formelmengen und Sätze

- Die Konzepte der vorherigen Folie gelten analog für Formelmengen.
  Beispiele:
  - Formelmenge $\Phi$ ist erfüllbar, wenn $\mathcal{I}, \alpha \models \Phi$ für mindestens ein $\mathcal{I}, \alpha$
  - Formelmenge $\Phi$ impliziert Formel $\psi$, geschrieben $\Phi \models \psi$, wenn alle Modelle von $\Phi$ Modelle von $\psi$ sind.
  - Formelmenge $\Phi$ impliziert Formelmenge $\Psi$, geschrieben $\Phi \models \Psi$,
    wenn alle Modelle von $\Phi$ Modelle von $\Psi$ sind.

# Terminologie für Formelmengen und Sätze

- Die Konzepte der vorherigen Folie gelten analog für Formelmengen.
  Beispiele:
  - Formelmenge $\Phi$ ist erfüllbar, wenn $\mathcal{I}, \alpha \models \Phi$ für mindestens ein $\mathcal{I}, \alpha$
  - Formelmenge $\Phi$ impliziert Formel $\psi$, geschrieben $\Phi \models \psi$, wenn alle Modelle von $\Phi$ Modelle von $\psi$ sind.
  - Formelmenge $\Phi$ impliziert Formelmenge $\Psi$, geschrieben $\Phi \models \Psi$,
    wenn alle Modelle von $\Phi$ Modelle von $\Psi$ sind.
- Alle Konzepte können als Spezialfall auf Sätze (oder Mengen von Sätzen) angewandt werden. In diesem Fall lassen wir $\alpha$ normalerweise weg.
  Beispiele:
  - Interpretation $\mathcal{I}$ ist ein Modell eines Satzes $\varphi$, wenn $\mathcal{I} \models \varphi$.
  - Satz $\varphi$ ist unerfüllbar, wenn $\mathcal{I} \not\models \varphi$ für alle $\mathcal{I}$.

# Fragen

Fragen?

# Weitere Themen

# Ausblick

Basierend auf diesen Definitionen, könnten wir dieselben Themen wie bei der Aussagenlogik behandeln:

- wichtige logische Äquivalenzen
- Normalformen
- Folgerungstheoreme (Deduktionstheorem etc.)
- Kalküle
- (prädikatenlogische) Resolution

Wir stellen kurz einige grundlegende Ergebnisse zu diesen Themen vor, werden sie aber nicht detailliert behandeln.

# Logische Äquivalenzen

- Alle logischen Äquivalenzen der Aussagenlogik gelten auch in der Prädikatenlogik (z. B., $(\varphi \lor \psi) \equiv (\psi \lor \varphi)$).
- Zudem gelten folgende Äquivalenzen und Folgerungen:

$$
\begin{aligned}
(\forall x\varphi \land \forall x\psi) &\equiv \forall x(\varphi \land \psi) && \\
(\forall x\varphi \lor \forall x\psi) &\models \forall x(\varphi \lor \psi) && \text{aber nicht umgekehrt} \\
(\forall x\varphi \land \psi) &\equiv \forall x(\varphi \land \psi) && \text{wenn } x \notin \mathit{frei}(\psi) \\
(\forall x\varphi \lor \psi) &\equiv \forall x(\varphi \lor \psi) && \text{wenn } x \notin \mathit{frei}(\psi) \\
\neg\forall x\varphi &\equiv \exists x\neg\varphi && \\
\exists x(\varphi \lor \psi) &\equiv (\exists x\varphi \lor \exists x\psi) && \\
\exists x(\varphi \land \psi) &\models (\exists x\varphi \land \exists x\psi) && \text{aber nicht umgekehrt} \\
(\exists x\varphi \lor \psi) &\equiv \exists x(\varphi \lor \psi) && \text{wenn } x \notin \mathit{frei}(\psi) \\
(\exists x\varphi \land \psi) &\equiv \exists x(\varphi \land \psi) && \text{wenn } x \notin \mathit{frei}(\psi) \\
\neg\exists x\varphi &\equiv \forall x\neg\varphi &&
\end{aligned}
$$

# Normalformen

Analog zur DNF und KNF für Aussagenlogik gibt es verschiedene relevante Normalformen für Prädikatenlogik, wie z.B.

- Negationsnormalform (NNF):
  Negationssymbole ($\neg$) dürfen nur vor Atomen vorkommen.
- Pränexnormalform:
  Quantoren müssen den äussersten Teil der Formel bilden.
- Skolemnormalform:
  Pränexnormalform ohne Existenzquantoren

Effiziente Verfahren transformieren Formel $\varphi$

- in eine äquivalente Formel in Negationsnormalform,
- in eine äquivalente Formel in Pränexnormalform, oder
- in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolemnormalform.

# Ableitung, Beweissysteme, Resolution,...

- Das Deduktionstheorem, Kontrapositionstheorem und das Widerlegungstheorem gelten auch für Prädikatenlogik.
- Es gibt korrekte und vollständige Beweissysteme (Kalküle) für Prädikatenlogik.
- Resolution kann mit dem Konzept der Unifizierung auf Prädikatenlogik erweitert werden.
- Prädikatenlogische Resolution ist widerlegungsvollständig und ergibt somit mit dem Widerlegungstheorem ein allgemeines Schlussfolgerungsverfahren.
- Allerdings terminiert der Algorithmus nicht auf allen Eingaben.

# Fragen

Fragen?

# Zusammenfassung

# Zusammenfassung

- Prädikatenlogik ist ausdrucksmächtiger als Aussagenlogik und erlaubt Schlussfolgerungen über Objekte und ihre Eigenschaften.
- Objekte werden durch Terme beschrieben, die aus Variablen-, Konstanten- und Funktionssymbolen zusammengesetzt sind.
- Eigenschaften und Zusammenhänge werden von Formeln beschrieben, die aus Prädikaten, Quantoren und den üblichen logischen Operatoren zusammengesetzt sind.
- Wie bei allen Logiken analysieren wir
  - Syntax: Was ist eine Formel?
  - Semantik: Wie interpretieren wir eine Formel?
  - Schlussfolgerungsmethoden: Wie können wir logische Konsequenzen aus einer Wissensbasis zeigen?

# Weitere Logiken

- Wir haben Prädikatenlogik der ersten Stufe betrachtet.
- Prädikatenlogik der zweiten Stufe erlaubt zum Beispiel Quantifizierung über Prädikatsymbole.
- Es gibt Zwischenstufen, z.B. Monadische Logik zweiter Stufe (alle Prädikatsymbole haben Stelligkeit 1)
- Modallogiken haben neue Operatoren $\Box$ und $\Diamond$
  - Klassische Bedeutung: $\Box\varphi$ für „$\varphi$ ist notwendig“,
    $\Diamond\varphi$ für „$\varphi$ ist möglich“.
  - Temporallogik: $\Box\varphi$ für „$\varphi$ gilt in der Zukunft immer“,
    $\Diamond\varphi$ für „$\varphi$ gilt irgendwann in der Zukunft“
  - Deontische Logik: $\Box\varphi$ für „$\varphi$ ist verpflichtend“,
    $\Diamond\varphi$ für „$\varphi$ ist erlaubt“
  - ...
- In Fuzzylogik sind Formeln nicht wahr oder falsch, sondern haben Werte zwischen 0 und 1.

# Wie geht es weiter?

Inhalte dieser Vorlesung

- Logik
  ▷ Wie kann man Wissen und Zusammenhänge repräsentieren und automatisiert verarbeiten?
- Automatentheorie und formale Sprachen
  ▷ Was ist eine Berechnung?
- Berechenbarkeitstheorie
  ▷ Was kann überhaupt berechnet werden?
- Komplexitätstheorie
  ▷ Was kann effizient berechnet werden?

# Wie geht es weiter?

Inhalte dieser Vorlesung

- Logik ✓
  ▷ Wie kann man Wissen und Zusammenhänge repräsentieren und automatisiert verarbeiten?
- Automatentheorie und formale Sprachen
  ▷ Was ist eine Berechnung?
- Berechenbarkeitstheorie
  ▷ Was kann überhaupt berechnet werden?
- Komplexitätstheorie
  ▷ Was kann effizient berechnet werden?