

Theorie der Informatik

6. Prädikatenlogik

Malte Helmert Gabriele Röger

Universität Basel

11./16. März 2015

Theorie der Informatik

11./16. März 2015 — 6. Prädikatenlogik

6.1 Motivation

6.2 Syntax der Prädikatenlogik

6.3 Semantik der Prädikatenlogik

6.4 Freie und gebundene Variablen

6.5 Eigenschaften von Formeln und Formelmengen

6.6 Weitere Themen

6.7 Zusammenfassung

6.1 Motivation

Grenzen der Aussagenlogik

Gruppenaxiome für $(G, \circ, e)$:

- ➊ Für alle $x, y, z \in G$ gilt $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.
- ➋ Für alle $x \in G$ gilt $x \circ e = x$.
- ➌ Für alle $x \in G$ gibt es ein $y \in G$ mit $x \circ y = e$.

Können wir in Aussagenlogik nicht ausdrücken:

- ▶ Objekte x, y, z aus G
- ▶ Objektreferenzierung $(x \circ y)$ mit Funktion $\circ$
- ▶ Gleichheit $=$
- ▶ „Für alle“, „es gibt“

▷ Benötigen ausdrucksstärkere Logik

↪ **Prädikatenlogik**

6.2 Syntax der Prädikatenlogik

Syntax: Bestandteile

- ▶ **Signaturen** definieren erlaubte Symbole.
Analogie: Variablenmenge A in Aussagenlogik
- ▶ **Terme** werden von Semantik mit Objekten assoziiert.
Keine Analogie in Aussagenlogik
- ▶ **Formeln** werden von Semantik mit Wahrheitswerten (*wahr* oder *falsch*) assoziiert.
Analogie: Formeln in Aussagenlogik

Signaturen: Definition

Definition (Signatur)

Eine **Signatur** (der Prädikatenlogik) ist ein 4-Tupel $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ aus folgenden vier disjunkten Mengen:

- ▶ eine endliche oder abzählbare Menge $\mathcal{V}$ von **Variablensymbolen**
- ▶ eine endliche oder abzählbare Menge $\mathcal{K}$ von **Konstantensymbolen**
- ▶ eine endliche oder abzählbare Menge $\mathcal{F}$ von **Funktionssymbolen**
- ▶ eine endliche oder abzählbare Menge $\mathcal{P}$ von **Prädikatsymbolen** (oder **Relationssymbolen**)

Jedes Funktionssymbol $f \in \mathcal{F}$ und Prädikatsymbol $P \in \mathcal{P}$ hat eine assoziierte **Stelligkeit** $St(f), St(P) \in \mathbb{N}_1$ (Anzahl von Argumenten).

Signaturen: Terminologie und Konventionen

Terminologie

- ▶ **k -stelliges** (Funktions- oder Prädikat-) symbol:
Symbol s mit Stelligkeit $St(s) = k$.
- ▶ **Auch:** *unär, binär, ternär*

Konventionen (in dieser Vorlesung):

- ▶ Variablensymbole werden *kursiv* dargestellt, andere Symbole aufrecht.
- ▶ Prädikatsymbole beginnen mit Grossbuchstaben, andere Symbole mit Kleinbuchstaben

Signaturen: Beispiele

Beispiel: Arithmetik

- ▶ $\mathcal{V} = \{x, y, z, x_1, x_2, x_3, \dots\}$
- ▶ $\mathcal{K} = \{\text{null}, \text{eins}\}$
- ▶ $\mathcal{F} = \{\text{summe}, \text{produkt}\}$
- ▶ $\mathcal{P} = \{\text{Positiv}, \text{Quadratzahl}\}$

$St(\text{summe}) = St(\text{produkt}) = 2$, $St(\text{Positiv}) = St(\text{Quadratzahl}) = 1$

Signaturen: Beispiele

Beispiel: Genealogie

- ▶ $\mathcal{V} = \{x, y, z, x_1, x_2, x_3, \dots\}$
- ▶ $\mathcal{K} = \{\text{roger-federer}, \text{lisa-simpson}\}$
- ▶ $\mathcal{F} = \emptyset$
- ▶ $\mathcal{P} = \{\text{Weiblich}, \text{Männlich}, \text{Elternteil}\}$

$St(\text{Weiblich}) = St(\text{Männlich}) = 1$, $St(\text{Elternteil}) = 2$

Terme: Definition

Definition (Term)

Sei $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ eine Signatur.

Ein **Term** (über $\mathcal{S}$) ist induktiv nach folgenden Regeln konstruiert:

- ▶ Jedes Variablensymbol $v \in \mathcal{V}$ ist ein Term.
- ▶ Jedes Konstantensymbol $k \in \mathcal{K}$ ist ein Term.
- ▶ Sind $t_1, \dots, t_k$ Terme und ist $f \in \mathcal{F}$ ein Funktionssymbol der Stelligkeit k , dann ist $f(t_1, \dots, t_k)$ ein Term.

Beispiele:

- ▶ x_4
- ▶ lisa-simson
- ▶ $\text{summe}(x_3, \text{produkt}(\text{eins}, x_5))$

Formeln: Definition

Definition (Formel)

Für eine Signatur $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ ist die Menge der prädikatenlogischen **Formeln** (über $\mathcal{S}$) induktiv wie folgt definiert:

- ▶ Sind $t_1, \dots, t_k$ Terme (über $\mathcal{S}$) und ist $P \in \mathcal{P}$ ein k -stelliges Prädikatsymbol, dann ist die **atomare Formel** (oder das **Atom**) $P(t_1, \dots, t_k)$ eine Formel über $\mathcal{S}$.
- ▶ Sind t_1 und t_2 Terme (über $\mathcal{S}$), dann ist die **Identität** $(t_1 = t_2)$ eine Formel über $\mathcal{S}$.
- ▶ Ist $x \in \mathcal{V}$ ein Variablensymbol und φ eine Formel über $\mathcal{S}$, dann sind die **Allquantifizierung** $\forall x \varphi$ und die **Existenzquantifizierung** $\exists x \varphi$ Formeln über $\mathcal{S}$.
- ▶ Ist φ eine Formel über $\mathcal{S}$, dann auch die **Negation** $\neg \varphi$.
- ▶ Sind φ und ψ Formeln über $\mathcal{S}$, dann auch die **Konjunktion** $(\varphi \wedge \psi)$ und die **Disjunktion** $(\varphi \vee \psi)$.

Formeln: Beispiele

Beispiele: Arithmetik und Genealogie

- ▶ $\text{Positiv}(x_2)$
- ▶ $\forall x (\neg \text{Quadratzahl}(x) \vee \text{Positiv}(x))$
- ▶ $\exists x_3 (\text{Quadratzahl}(x_3) \wedge \neg \text{Positiv}(x_3))$
- ▶ $\forall x (x = y)$
- ▶ $\forall x (\text{summe}(x, x) = \text{produkt}(x, \text{eins}))$
- ▶ $\forall x \exists y (\text{summe}(x, y) = \text{null})$
- ▶ $\forall x \exists y (\text{Elternteil}(y, x) \wedge \text{Weiblich}(y))$

Terminologie: Die Symbole $\forall$ und $\exists$ heissen **Quantoren**.

Abkürzungen und Klammerung per Konvention

Abkürzungen

- ▶ $(\varphi \rightarrow \psi)$ ist Abkürzung für $(\neg \varphi \vee \psi)$.
- ▶ $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ist Abkürzung für $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$.
- ▶ Sequenzen von gleichen Quantoren kann man zur Abkürzung zusammenfassen. Zum Beispiel:
 - ▶ $\forall x \forall y \forall z \varphi \rightsquigarrow \forall xyz \varphi$
 - ▶ $\exists x \exists y \exists z \varphi \rightsquigarrow \exists xyz \varphi$
 - ▶ $\forall w \exists x \exists y \forall z \varphi \rightsquigarrow \forall w \exists xy \forall z \varphi$

Klammerung per Konvention

- ▶ analog zur Aussagenlogik
- ▶ Quantoren $\forall$ und $\exists$ binden stärker als alles andere.
- ▶ Beispiel: $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$ entspricht $(\forall x P(x) \rightarrow Q(x))$, nicht $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$.

6.3 Semantik der Prädikatenlogik

Semantik: Motivation

- ▶ Interpretation in der Aussagenlogik: Wahrheitsbelegung für die **Aussagenvariablen**
- ▶ Gibt keine Aussagenvariablen in Prädikatenlogik
- ▶ Stattdessen: Interpretation legt Bedeutung der **Konstanten**-, **Funktions**- und **Prädikatsymbole** fest.
- ▶ Bedeutung von **Variablensymbolen** nicht durch Interpretation festgelegt, sondern durch gesonderte **Variablenzuweisung**.

Interpretationen und Variablenzuweisungen

Sei $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ eine Signatur.

Definition (Interpretation, Variablenzuweisung)

Eine **Interpretation** (für $\mathcal{S}$) ist ein Paar $\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ mit folgenden Komponenten:

- ▶ eine nichtleere Menge U genannt **Universum** (oder **Grundmenge**) und
- ▶ eine Funktion $\cdot^{\mathcal{I}}$, die den Konstanten-, Funktions- und Prädikatsymbolen eine Bedeutung zuweist:
 - ▶ $k^{\mathcal{I}} \in U$ für Konstantensymbole $k \in \mathcal{K}$
 - ▶ $f^{\mathcal{I}} : U^k \rightarrow U$ für k -stellige Funktionssymbole $f \in \mathcal{F}$
 - ▶ $P^{\mathcal{I}} \subseteq U^k$ für k -stellige Prädikatsymbole $P \in \mathcal{P}$

Eine **Variablenzuweisung** (für $\mathcal{S}$ und Universum U) ist eine Funktion $\alpha : \mathcal{V} \rightarrow U$.

Interpretationen und Variablenzuweisungen: Beispiel

Beispiel

Signatur: $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ mit $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$,
 $\mathcal{K} = \{\text{null}, \text{eins}\}$, $\mathcal{F} = \{\text{summe}, \text{produkt}\}$, $\mathcal{P} = \{\text{Quadratzahl}\}$
 $St(\text{summe}) = St(\text{produkt}) = 2$, $St(\text{Quadratzahl}) = 1$

$\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ mit

- ▶ $U = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$
- ▶ $\text{null}^{\mathcal{I}} = u_0$
- ▶ $\text{eins}^{\mathcal{I}} = u_1$
- ▶ $\text{summe}^{\mathcal{I}}(u_i, u_j) = u_{(i+j) \bmod 7}$ für alle $i, j \in \{0, \dots, 6\}$
- ▶ $\text{produkt}^{\mathcal{I}}(u_i, u_j) = u_{(i \cdot j) \bmod 7}$ für alle $i, j \in \{0, \dots, 6\}$
- ▶ $\text{Quadratzahl}^{\mathcal{I}} = \{u_0, u_1, u_2, u_4\}$

$\alpha = \{x \mapsto u_5, y \mapsto u_5, z \mapsto u_0\}$

Semantik: informell

Beispiel: $(\forall x(\text{Block}(x) \rightarrow \text{Rot}(x)) \wedge \text{Block}(a))$

„Für alle Objekte x : wenn x ein Block ist, dann ist x rot.“

Zudem ist das Objekt, das mit a bezeichnet wird, ein Block.“

- ▶ **Terme** werden als **Objekte** interpretiert.
- ▶ **Unäre Prädikate** bezeichnen Eigenschaften von Objekten (ein Block sein, rot sein, eine Quadratzahl sein, ...)
- ▶ **Allgemeine Prädikate** beschreiben Beziehungen zwischen Objekten (das Kind von jemandem sein, einen gemeinsamen Teiler haben, ...)
- ▶ **Allquantifizierte** Formeln („ $\forall$ “) sind wahr, wenn sie für **alle** Objekte im Universum gelten.
- ▶ **Existenzquantifizierte** Formeln („ $\exists$ “) sind wahr, wenn sie für **mindestens ein** Objekt im Universum gelten.

Interpretation von Termen

Sei $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ eine Signatur.

Definition (Interpretation eines Terms)

Sei $\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ eine Interpretation für $\mathcal{S}$,
 und sei α eine Variablenzuweisung für $\mathcal{S}$ und Universum U .

Sei t ein Term über $\mathcal{S}$.

Die **Interpretation von t** unter $\mathcal{I}$ und α , symbolisch $t^{\mathcal{I}, \alpha}$, ist ein Element des Universums U und folgendermassen definiert:

- ▶ Wenn $t = x$ mit $x \in \mathcal{V}$ (t ist ein **Variablenterm**):
 $x^{\mathcal{I}, \alpha} = \alpha(x)$
- ▶ Wenn $t = k$ mit $k \in \mathcal{K}$ (t ist ein **Konstantenterm**):
 $k^{\mathcal{I}, \alpha} = k^{\mathcal{I}}$
- ▶ Wenn $t = f(t_1, \dots, t_k)$ (t ist ein **Funktionsterm**):
 $f(t_1, \dots, t_k)^{\mathcal{I}, \alpha} = f^{\mathcal{I}}(t_1^{\mathcal{I}, \alpha}, \dots, t_k^{\mathcal{I}, \alpha})$

Interpretation von Termen: Beispiel

Beispiel

Signatur: $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$

mit $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{K} = \{\text{null}, \text{eins}\}$, $\mathcal{F} = \{\text{summe}, \text{produkt}\}$,

$St(\text{summe}) = St(\text{produkt}) = 2$

$\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ mit

- ▶ $U = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$
- ▶ $\text{null}^{\mathcal{I}} = u_0$
- ▶ $\text{eins}^{\mathcal{I}} = u_1$
- ▶ $\text{summe}^{\mathcal{I}}(u_i, u_j) = u_{(i+j) \bmod 7}$ für alle $i, j \in \{0, \dots, 6\}$
- ▶ $\text{produkt}^{\mathcal{I}}(u_i, u_j) = u_{(i \cdot j) \bmod 7}$ für alle $i, j \in \{0, \dots, 6\}$

$\alpha = \{x \mapsto u_5, y \mapsto u_5, z \mapsto u_0\}$

Interpretation von Termen: Beispiel (Forts.)

Beispiel (Forts.)

▶ $\text{null}^{\mathcal{I}, \alpha} =$

▶ $y^{\mathcal{I}, \alpha} =$

▶ $\text{summe}(x, y)^{\mathcal{I}, \alpha} =$

▶ $\text{produkt}(\text{eins}, \text{summe}(x, \text{null}))^{\mathcal{I}, \alpha} =$

Semantik prädikatenlogischer Formeln

Sei $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ eine Signatur.

Definition (Formel ist erfüllt oder wahr)

Sei $\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ eine Interpretation für $\mathcal{S}$, und

sei α eine Variablenzuweisung für $\mathcal{S}$ und Grundmenge U .

Wir sagen $\mathcal{I}$ und α **erfüllen** eine prädikatenlogische Formel φ

(auch: φ ist **wahr** unter $\mathcal{I}$ und α), symbolisch: $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$,

entsprechend der folgenden induktiven Regeln:

$$\mathcal{I}, \alpha \models P(t_1, \dots, t_k) \quad \text{gdw} \quad \langle t_1^{\mathcal{I}, \alpha}, \dots, t_k^{\mathcal{I}, \alpha} \rangle \in P^{\mathcal{I}}$$

$$\mathcal{I}, \alpha \models (t_1 = t_2) \quad \text{gdw} \quad t_1^{\mathcal{I}, \alpha} = t_2^{\mathcal{I}, \alpha}$$

$$\mathcal{I}, \alpha \models \neg \varphi \quad \text{gdw} \quad \mathcal{I}, \alpha \not\models \varphi$$

$$\mathcal{I}, \alpha \models (\varphi \wedge \psi) \quad \text{gdw} \quad \mathcal{I}, \alpha \models \varphi \text{ und } \mathcal{I}, \alpha \models \psi$$

$$\mathcal{I}, \alpha \models (\varphi \vee \psi) \quad \text{gdw} \quad \mathcal{I}, \alpha \models \varphi \text{ oder } \mathcal{I}, \alpha \models \psi$$

...

Semantik prädikatenlogischer Formeln

Sei $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ eine Signatur.

Definition (Formel ist erfüllt oder wahr)

...

$$\mathcal{I}, \alpha \models \forall x \varphi \quad \text{gdw} \quad \mathcal{I}, \alpha[x := u] \models \varphi \text{ für alle } u \in U$$

$$\mathcal{I}, \alpha \models \exists x \varphi \quad \text{gdw} \quad \mathcal{I}, \alpha[x := u] \models \varphi \text{ für mindestens ein } u \in U$$

wobei $\alpha[x := u]$ die gleiche Variablenbelegung ist wie α , ausser dass sie der Variable x den Wert u zuweist.

Formal:

$$(\alpha[x := u])(z) = \begin{cases} u & \text{falls } z = x \\ \alpha(z) & \text{falls } z \neq x \end{cases}$$

Semantik: Beispiel

Beispiel

Signatur: $\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$

mit $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{K} = \{a, b\}$, $\mathcal{F} = \emptyset$, $\mathcal{P} = \{\text{Block}, \text{Rot}\}$,

$St(\text{Block}) = St(\text{Rot}) = 1$.

$\mathcal{I} = \langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ mit

- ▶ $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$
- ▶ $a^{\mathcal{I}} = u_1$
- ▶ $b^{\mathcal{I}} = u_3$
- ▶ $\text{Block}^{\mathcal{I}} = \{u_1, u_2\}$
- ▶ $\text{Rot}^{\mathcal{I}} = \{u_1, u_2, u_3, u_5\}$

$\alpha = \{x \mapsto u_1, y \mapsto u_2, z \mapsto u_1\}$

Semantik: Beispiel (Forts.)

Beispiel (Forts.)

Fragen:

- ▶ $\mathcal{I}, \alpha \models (\text{Block}(b) \vee \neg \text{Block}(b))?$
- ▶ $\mathcal{I}, \alpha \models (\text{Block}(x) \rightarrow (\text{Block}(x) \vee \neg \text{Block}(y)))?$
- ▶ $\mathcal{I}, \alpha \models (\text{Block}(a) \wedge \text{Block}(b))?$
- ▶ $\mathcal{I}, \alpha \models \forall x (\text{Block}(x) \rightarrow \text{Rot}(x))?$

6.4 Freie und gebundene Variablen

Freie und gebundene Variablen: Motivation

Frage:

- ▶ Betrachte eine Signatur mit Variablensymbolen $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ und eine Interpretation $\mathcal{I}$.
- ▶ Welche Teile der Definition von α sind relevant, um zu entscheiden, ob
 $\mathcal{I}, \alpha \models (\forall x_4 (R(x_4, x_2) \vee (f(x_3) = x_4)) \vee \exists x_3 S(x_3, x_2))?$
- ▶ $\alpha(x_1), \alpha(x_5), \alpha(x_6), \alpha(x_7), \dots$ sind irrelevant, da diese Variablensymbole in keiner Formel vorkommen.
- ▶ $\alpha(x_4)$ ist auch nicht relevant: Die Variable kommt zwar in der Formel vor, aber alle Vorkommen sind von einem umgebenden Quantor gebunden.
- ▶ $\rightsquigarrow$ nur Zuweisungen für freie Variablen x_2 und x_3 relevant

Variablen eines Terms

Definition (Variablen eines Terms)

Sei t ein Term. Die Menge der in t vorkommenden **Variablen**, geschrieben $\text{var}(t)$, ist folgendermassen definiert:

- ▶ $\text{var}(x) = \{x\}$
für Variablensymbole x
- ▶ $\text{var}(k) = \emptyset$
für Konstantensymbole k
- ▶ $\text{var}(f(t_1, \dots, t_l)) = \text{var}(t_1) \cup \dots \cup \text{var}(t_l)$
für Funktionsterme

Terminologie: Ein Term t mit $\text{var}(t) = \emptyset$ heisst **Grundterm**.

Beispiel: $\text{var}(\text{produkt}(x, \text{summe}(k, y))) =$

Freie und gebundene Variablen einer Formel

Definition (Freie Variablen)

Sei φ eine logische Formel. Die Menge der **freien Variablen** von φ , geschrieben $\text{frei}(\varphi)$, ist folgendermassen definiert:

- ▶ $\text{frei}(P(t_1, \dots, t_k)) = \text{var}(t_1) \cup \dots \cup \text{var}(t_k)$
- ▶ $\text{frei}(t_1 = t_2) = \text{var}(t_1) \cup \text{var}(t_2)$
- ▶ $\text{frei}(\neg\varphi) = \text{frei}(\varphi)$
- ▶ $\text{frei}(\varphi \wedge \psi) = \text{frei}(\varphi \vee \psi) = \text{frei}(\varphi) \cup \text{frei}(\psi)$
- ▶ $\text{frei}(\forall x \varphi) = \text{frei}(\exists x \varphi) = \text{frei}(\varphi) \setminus \{x\}$

Beispiel: $\text{frei}((\forall x_4 (R(x_4, x_2) \vee (f(x_3) = x_4)) \vee \exists x_3 S(x_3, x_2)))$
=

Geschlossene Formeln/Sätze

Anmerkung: Sei φ eine Formel und seien α und β Variablenzuweisungen mit $\alpha(x) = \beta(x)$ für alle freien Variablen x von φ . Dann gilt $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$ gdw. $\mathcal{I}, \beta \models \varphi$.

Insbesondere ist α **vollkommen irrelevant**, wenn $\text{frei}(\varphi) = \emptyset$.

Definition (Geschlossene Formeln/Sätze)

Eine Formel φ ohne freie Variablen (d. h., $\text{frei}(\varphi) = \emptyset$) wird **geschlossene Formel** oder **Satz** genannt.

Wenn φ ein Satz ist, dann schreiben wir oft $\mathcal{I} \models \varphi$ statt $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$, da die Definition von α nicht beeinflusst, ob φ unter $\mathcal{I}$ und α wahr ist oder nicht.

Formeln mit mindestens einer freien Variablen heissen **offen**.

Geschlossene Formeln: Beispiele

Frage: Welche der folgenden Formeln sind Sätze?

- ▶ $(\text{Block}(b) \vee \neg \text{Block}(b))$
- ▶ $(\text{Block}(x) \rightarrow (\text{Block}(x) \vee \neg \text{Block}(y)))$
- ▶ $(\text{Block}(a) \wedge \text{Block}(b))$
- ▶ $\forall x (\text{Block}(x) \rightarrow \text{Red}(x))$

6.5 Eigenschaften von Formeln und Formelmengen

Terminologie für Formeln

Die Terminologie, die wir für die Aussagenlogik eingeführt haben, gilt analog für die Prädikatenlogik:

- ▶ Interpretation $\mathcal{I}$ und Variablenzuweisung α bilden ein **Modell** der Formel φ , wenn $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$.
- ▶ Formel φ ist **erfüllbar**, wenn $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$ für mindestens ein $\mathcal{I}, \alpha$.
- ▶ Formel φ ist **falsifizierbar**, wenn $\mathcal{I}, \alpha \not\models \varphi$ für mindestens ein $\mathcal{I}, \alpha$.
- ▶ Formel φ ist **gültig**, wenn $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$ für alle $\mathcal{I}, \alpha$.
- ▶ Formel φ ist **unerfüllbar**, wenn $\mathcal{I}, \alpha \not\models \varphi$ für alle $\mathcal{I}, \alpha$.
- ▶ Formel φ **impliziert** Formel ψ , geschrieben $\varphi \models \psi$, wenn alle Modelle von φ Modelle von ψ sind.
- ▶ Formeln φ und ψ sind **logisch äquivalent**, geschrieben $\varphi \equiv \psi$, wenn sie die gleichen Modelle haben (äquivalent: wenn $\varphi \models \psi$ und $\psi \models \varphi$).

Formelmengen: Semantik

Definition (Formelmenge ist erfüllt oder wahr)

Sei $\mathcal{S}$ eine Signatur, Φ eine Menge von Formeln über $\mathcal{S}$, $\mathcal{I}$ eine Interpretation für $\mathcal{S}$ und α eine Variablenzuweisung für $\mathcal{S}$ und das Universum von $\mathcal{I}$.

Wir sagen, dass $\mathcal{I}$ und α die Menge Φ **erfüllen** (auch: Φ ist **wahr** unter $\mathcal{I}$ und α), symbolisch: $\mathcal{I}, \alpha \models \Phi$, wenn $\mathcal{I}, \alpha \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$.

Terminologie für Formelmengen und Sätze

- ▶ Die Konzepte der vorherigen Folie gelten analog für **Formelmengen**.
Beispiele:
 - ▶ Formelmenge Φ ist erfüllbar, wenn $\mathcal{I}, \alpha \models \Phi$ für mindestens ein $\mathcal{I}, \alpha$.
 - ▶ Formelmenge Φ impliziert Formel ψ , geschrieben $\Phi \models \psi$, wenn alle Modelle von Φ Modelle von ψ sind.
 - ▶ Formelmenge Φ impliziert Formelmenge Ψ , geschrieben $\Phi \models \Psi$, wenn alle Modelle von Φ Modelle von Ψ sind.
- ▶ Alle Konzepte können als Spezialfall auf **Sätze** (oder Mengen von Sätzen) angewandt werden. In diesem Fall lassen wir α normalerweise weg.
Beispiele:
 - ▶ Interpretation $\mathcal{I}$ ist ein **Modell** eines Satzes φ , wenn $\mathcal{I} \models \varphi$.
 - ▶ Satz φ ist **unerfüllbar**, wenn $\mathcal{I} \not\models \varphi$ für alle $\mathcal{I}$.

6.6 Weitere Themen

Ausblick

Basierend auf diesen Definitionen, könnten wir dieselben Themen wie bei der Aussagenlogik behandeln:

- ▶ wichtige **logische Äquivalenzen**
- ▶ **Normalformen**
- ▶ **Folgerungstheoreme** (Deduktionstheorem etc.)
- ▶ **Kalküle**
- ▶ (prädikatenlogische) **Resolution**

Wir stellen kurz einige grundlegende Ergebnisse zu diesen Themen vor, werden sie aber nicht detailliert behandeln.

Logische Äquivalenzen

- ▶ Alle **logischen Äquivalenzen der Aussagenlogik** gelten auch in der Prädikatenlogik (z. B., $(\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi)$).
- ▶ Zudem gelten folgende Äquivalenzen und Folgerungen:

$(\forall x \varphi \wedge \forall x \psi) \equiv \forall x(\varphi \wedge \psi)$	
$(\forall x \varphi \vee \forall x \psi) \models \forall x(\varphi \vee \psi)$	aber nicht umgekehrt
$(\forall x \varphi \wedge \psi) \equiv \forall x(\varphi \wedge \psi)$	wenn $x \notin \text{frei}(\psi)$
$(\forall x \varphi \vee \psi) \equiv \forall x(\varphi \vee \psi)$	wenn $x \notin \text{frei}(\psi)$
$\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$	
$\exists x(\varphi \vee \psi) \equiv (\exists x \varphi \vee \exists x \psi)$	
$\exists x(\varphi \wedge \psi) \models (\exists x \varphi \wedge \exists x \psi)$	aber nicht umgekehrt
$(\exists x \varphi \vee \psi) \equiv \exists x(\varphi \vee \psi)$	wenn $x \notin \text{frei}(\psi)$
$(\exists x \varphi \wedge \psi) \equiv \exists x(\varphi \wedge \psi)$	wenn $x \notin \text{frei}(\psi)$
$\neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi$	

Normalformen

Analog zur DNF und KNF für Aussagenlogik gibt es verschiedene relevante Normalformen für Prädikatenlogik, wie z.B.

- ▶ **Negationsnormalform (NNF)**:
Negationssymbole ($\neg$) dürfen nur vor Atomen vorkommen.
- ▶ **Pränexnormalform**:
Quantoren müssen den äussersten Teil der Formel bilden.
- ▶ **Skolemnormalform**:
Pränexnormalform ohne Existenzquantoren

Effiziente Verfahren transformieren Formel φ

- ▶ in eine **äquivalente** Formel in **Negationsnormalform**,
- ▶ in eine **äquivalente** Formel in **Pränexnormalform**, oder
- ▶ in eine **erfüllbarkeitsäquivalente** Formel in **Skolemnormalform**.

Ableitung, Beweissysteme, Resolution,...

- ▶ Das **Deduktionstheorem**, **Kontrapositionstheorem** und das **Widerlegungstheorem** gelten auch für Prädikatenlogik.
- ▶ Es gibt korrekte und vollständige **Beweissysteme** (**Kalküle**) für Prädikatenlogik.
- ▶ **Resolution** kann mit dem Konzept der **Unifizierung** auf Prädikatenlogik erweitert werden.
- ▶ Prädikatenlogische Resolution ist **widerlegungsvollständig** und ergibt somit mit dem Widerlegungstheorem ein allgemeines Schlussfolgerungsverfahren.
- ▶ Allerdings **terminiert der Algorithmus nicht auf allen Eingaben**.

6.7 Zusammenfassung

Zusammenfassung

- ▶ **Prädikatenlogik** ist ausdrucksmächtiger als Aussagenlogik und erlaubt Schlussfolgerungen über **Objekte** und ihre **Eigenschaften**.
- ▶ Objekte werden durch **Terme** beschrieben, die aus Variablen-, Konstanten- und Funktionssymbolen zusammengesetzt sind.
- ▶ Eigenschaften und Zusammenhänge werden von **Formeln** beschrieben, die aus Prädikaten, Quantoren und den üblichen logischen Operatoren zusammengesetzt sind.
- ▶ Wie bei allen Logiken analysieren wir
 - ▶ **Syntax**: Was ist eine Formel?
 - ▶ **Semantik**: Wie interpretieren wir eine Formel?
 - ▶ **Schlussfolgerungsmethoden**: Wie können wir logische Konsequenzen aus einer Wissensbasis zeigen?

Weitere Logiken

- ▶ Wir haben Prädikatenlogik **der ersten Stufe** betrachtet.
- ▶ Prädikatenlogik **der zweiten Stufe** erlaubt zum Beispiel Quantifizierung über Prädikatsymbole.
- ▶ Es gibt Zwischenstufen, z.B. Monadische Logik zweiter Stufe (alle Prädikatsymbole haben Stelligkeit 1)
- ▶ **Modallogiken** haben neue Operatoren $\Box$ und $\Diamond$
 - ▶ Klassische Bedeutung: $\Box\varphi$ für „ φ ist notwendig“, $\Diamond\varphi$ für „ φ ist möglich“.
 - ▶ Temporallogik: $\Box\varphi$ für „ φ gilt in der Zukunft immer“, $\Diamond\varphi$ für „ φ gilt irgendwann in der Zukunft“
 - ▶ Deontische Logik: $\Box\varphi$ für „ φ ist verpflichtend“, $\Diamond\varphi$ für „ φ ist erlaubt“
 - ▶ ...
- ▶ In **Fuzzylogik** sind Formeln nicht wahr oder falsch, sondern haben Werte zwischen 0 und 1.

Wie geht es weiter?

Inhalte dieser Vorlesung

- ▶ **Logik** ✓
 - ▷ Wie kann man Wissen und Zusammenhänge repräsentieren und automatisiert verarbeiten?
- ▶ **Automatentheorie und formale Sprachen**
 - ▷ Was ist eine Berechnung?
- ▶ **Berechenbarkeitstheorie**
 - ▷ Was kann überhaupt berechnet werden?
- ▶ **Komplexitätstheorie**
 - ▷ Was kann effizient berechnet werden?