

Theorie der Informatik

5. Aussagenlogik III

Malte Helmert Gabriele Röger

Universität Basel

9. März 2015

Was (unter anderem) letztes Mal geschah

- **Logische Äquivalenz** erfasst, wann Formeln semantisch gleich sind.
- **Wissensbasis** ist Formelmenge, die gegebene Informationen beschreibt.
- **Logische Folgerung** $WB \models \varphi$ erlaubt auf Basis der Semantik zu schliessen, dass φ aus WB folgt.

Inferenz

Inferenz: Motivation

- Bisher: Beweise über logische Folgerung mit semantischen Argumenten

Inferenz: Motivation

- Bisher: Beweise über logische Folgerung mit semantischen Argumenten
- Kein allgemeiner Algorithmus

Inferenz: Motivation

- **Bisher:** Beweise über **logische Folgerung** mit **semantischen Argumenten**
- Kein allgemeiner Algorithmus
- **Lösung:** mit **syntaktischen Inferenzregeln** Formeln produzieren, die logisch aus gegebenen Formeln folgen

Inferenz: Motivation

- **Bisher:** Beweise über **logische Folgerung** mit **semantischen Argumenten**
- Kein allgemeiner Algorithmus
- **Lösung:** mit **syntaktischen Inferenzregeln** Formeln produzieren, die logisch aus gegebenen Formeln folgen
- **Vorteil:** **mechanische Arbeitsweise** einfach algorithmisch implementierbar

Inferenzregeln

- **Inferenzregeln** haben die Form

$$\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_k}{\psi}.$$

Inferenzregeln

- **Inferenzregeln** haben die Form

$$\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_k}{\psi}.$$

- Bedeutung: „Jedes Modell für $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ ist Modell für ψ .“

Inferenzregeln

- **Inferenzregeln** haben die Form

$$\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_k}{\psi}.$$

- Bedeutung: „Jedes Modell für $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ ist Modell für ψ .“
- Eine Inferenzregel mit $k = 0$ heisst **Axiom**.

Inferenzregeln

- **Inferenzregeln** haben die Form

$$\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_k}{\psi}.$$

- Bedeutung: „Jedes Modell für $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ ist Modell für ψ .“
- Eine Inferenzregel mit $k = 0$ heisst **Axiom**.
- Eine Menge von syntaktischen Inferenzregeln nennt man **Kalkül** oder **Beweissystem**.

Einige Inferenzregeln der Aussagenlogik

Modus ponens

$$\frac{\varphi, (\varphi \rightarrow \psi)}{\psi}$$

Einige Inferenzregeln der Aussagenlogik

Modus ponens

$$\frac{\varphi, (\varphi \rightarrow \psi)}{\psi}$$

Modus tollens

$$\frac{\neg\psi, (\varphi \rightarrow \psi)}{\neg\varphi}$$

Einige Inferenzregeln der Aussagenlogik

Modus ponens
$$\frac{\varphi, (\varphi \rightarrow \psi)}{\psi}$$

Modus tollens
$$\frac{\neg\psi, (\varphi \rightarrow \psi)}{\neg\varphi}$$

Und-Eliminierung
$$\frac{(\varphi \wedge \psi)}{\varphi} \quad \frac{(\varphi \wedge \psi)}{\psi}$$

Einige Inferenzregeln der Aussagenlogik

Modus ponens
$$\frac{\varphi, (\varphi \rightarrow \psi)}{\psi}$$

Modus tollens
$$\frac{\neg\psi, (\varphi \rightarrow \psi)}{\neg\varphi}$$

Und-Eliminierung
$$\frac{(\varphi \wedge \psi)}{\varphi} \quad \frac{(\varphi \wedge \psi)}{\psi}$$

Und-Einführung
$$\frac{\varphi, \psi}{(\varphi \wedge \psi)}$$

Einige Inferenzregeln der Aussagenlogik

Modus ponens
$$\frac{\varphi, (\varphi \rightarrow \psi)}{\psi}$$

Modus tollens
$$\frac{\neg\psi, (\varphi \rightarrow \psi)}{\neg\varphi}$$

Und-Eliminierung
$$\frac{(\varphi \wedge \psi)}{\varphi} \quad \frac{(\varphi \wedge \psi)}{\psi}$$

Und-Einführung
$$\frac{\varphi, \psi}{(\varphi \wedge \psi)}$$

Oder-Einführung
$$\frac{\varphi}{(\varphi \vee \psi)}$$

Einige Inferenzregeln der Aussagenlogik

Modus ponens
$$\frac{\varphi, (\varphi \rightarrow \psi)}{\psi}$$

Modus tollens
$$\frac{\neg\psi, (\varphi \rightarrow \psi)}{\neg\varphi}$$

Und-Eliminierung
$$\frac{(\varphi \wedge \psi)}{\varphi} \quad \frac{(\varphi \wedge \psi)}{\psi}$$

Und-Einführung
$$\frac{\varphi, \psi}{(\varphi \wedge \psi)}$$

Oder-Einführung
$$\frac{\varphi}{(\varphi \vee \psi)}$$

$(\leftrightarrow)$ -Eliminierung
$$\frac{(\varphi \leftrightarrow \psi)}{(\varphi \rightarrow \psi)} \quad \frac{(\varphi \leftrightarrow \psi)}{(\psi \rightarrow \varphi)}$$

Ableitungen

Definition (Ableitung)

Eine **Ableitung** oder ein **Beweis** einer Formel φ aus einer Wissensbasis WB ist eine Sequenz von Formeln $\psi_1, \dots, \psi_k$ für die gilt, dass

- $\psi_k = \varphi$ und
- für alle $i \in \{1, \dots, k\}$:
 - $\psi_i \in \text{WB}$, oder
 - ψ_i ist das Ergebnis der Anwendung einer Inferenzregel auf Elemente aus $\{\psi_1, \dots, \psi_{i-1}\}$.

Ableitung: Beispiel

Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow Q), (P \rightarrow R), ((Q \wedge R) \rightarrow S)\}$

Gesucht: Ableitung von $(S \wedge R)$ aus WB.

Ableitung: Beispiel

Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow Q), (P \rightarrow R), ((Q \wedge R) \rightarrow S)\}$

Gesucht: Ableitung von $(S \wedge R)$ aus WB.

① P (WB)

Ableitung: Beispiel

Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow Q), (P \rightarrow R), ((Q \wedge R) \rightarrow S)\}$

Gesucht: Ableitung von $(S \wedge R)$ aus WB.

- ① P (WB)
- ② $(P \rightarrow Q)$ (WB)

Ableitung: Beispiel

Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow Q), (P \rightarrow R), ((Q \wedge R) \rightarrow S)\}$

Gesucht: Ableitung von $(S \wedge R)$ aus WB.

- ① P (WB)
- ② $(P \rightarrow Q)$ (WB)
- ③ Q (1, 2, Modus ponens)

Ableitung: Beispiel

Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow Q), (P \rightarrow R), ((Q \wedge R) \rightarrow S)\}$

Gesucht: Ableitung von $(S \wedge R)$ aus WB.

- ① P (WB)
- ② $(P \rightarrow Q)$ (WB)
- ③ Q (1, 2, Modus ponens)
- ④ $(P \rightarrow R)$ (WB)

Ableitung: Beispiel

Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow Q), (P \rightarrow R), ((Q \wedge R) \rightarrow S)\}$

Gesucht: Ableitung von $(S \wedge R)$ aus WB.

- ① P (WB)
- ② $(P \rightarrow Q)$ (WB)
- ③ Q (1, 2, Modus ponens)
- ④ $(P \rightarrow R)$ (WB)
- ⑤ R (1, 4, Modus ponens)

Ableitung: Beispiel

Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow Q), (P \rightarrow R), ((Q \wedge R) \rightarrow S)\}$

Gesucht: Ableitung von $(S \wedge R)$ aus WB.

- ① P (WB)
- ② $(P \rightarrow Q)$ (WB)
- ③ Q (1, 2, Modus ponens)
- ④ $(P \rightarrow R)$ (WB)
- ⑤ R (1, 4, Modus ponens)
- ⑥ $(Q \wedge R)$ (3, 5, Und-Einführung)

Ableitung: Beispiel

Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow Q), (P \rightarrow R), ((Q \wedge R) \rightarrow S)\}$

Gesucht: Ableitung von $(S \wedge R)$ aus WB.

- ① P (WB)
- ② $(P \rightarrow Q)$ (WB)
- ③ Q (1, 2, Modus ponens)
- ④ $(P \rightarrow R)$ (WB)
- ⑤ R (1, 4, Modus ponens)
- ⑥ $(Q \wedge R)$ (3, 5, Und-Einführung)
- ⑦ $((Q \wedge R) \rightarrow S)$ (WB)

Ableitung: Beispiel

Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow Q), (P \rightarrow R), ((Q \wedge R) \rightarrow S)\}$

Gesucht: Ableitung von $(S \wedge R)$ aus WB.

- ① P (WB)
- ② $(P \rightarrow Q)$ (WB)
- ③ Q (1, 2, Modus ponens)
- ④ $(P \rightarrow R)$ (WB)
- ⑤ R (1, 4, Modus ponens)
- ⑥ $(Q \wedge R)$ (3, 5, Und-Einführung)
- ⑦ $((Q \wedge R) \rightarrow S)$ (WB)
- ⑧ S (6, 7, Modus ponens)

Ableitung: Beispiel

Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow Q), (P \rightarrow R), ((Q \wedge R) \rightarrow S)\}$

Gesucht: Ableitung von $(S \wedge R)$ aus WB.

- ① P (WB)
- ② $(P \rightarrow Q)$ (WB)
- ③ Q (1, 2, Modus ponens)
- ④ $(P \rightarrow R)$ (WB)
- ⑤ R (1, 4, Modus ponens)
- ⑥ $(Q \wedge R)$ (3, 5, Und-Einführung)
- ⑦ $((Q \wedge R) \rightarrow S)$ (WB)
- ⑧ S (6, 7, Modus ponens)
- ⑨ $(S \wedge R)$ (8, 5, Und-Einführung)

Korrektheit und Vollständigkeit

Definition (Korrektheit und Vollständigkeit eines Kalküls)

Wir schreiben $\text{WB} \vdash_K \varphi$, wenn es eine Ableitung von φ aus WB im Kalkül K gibt. (Falls der Kalkül K aus dem Kontext hervor geht, manchmal auch nur $\text{WB} \vdash \varphi$.)

Ein Kalkül K ist **korrekt**, wenn für alle WB und φ aus $\text{WB} \vdash_K \varphi$ folgt, dass $\text{WB} \models \varphi$.

Ein Kalkül K ist **vollständig**, wenn für all WB und φ aus $\text{WB} \models \varphi$ folgt, dass $\text{WB} \vdash_K \varphi$.

Korrektheit und Vollständigkeit

Definition (Korrektheit und Vollständigkeit eines Kalküls)

Wir schreiben $WB \vdash_K \varphi$, wenn es eine Ableitung von φ aus WB im Kalkül K gibt. (Falls der Kalkül K aus dem Kontext hervor geht, manchmal auch nur $WB \vdash \varphi$.)

Ein Kalkül K ist **korrekt**, wenn für alle WB und φ aus $WB \vdash_K \varphi$ folgt, dass $WB \models \varphi$.

Ein Kalkül K ist **vollständig**, wenn für all WB und φ aus $WB \models \varphi$ folgt, dass $WB \vdash_K \varphi$.

Betrachte den Kalkül K , der aus den vorhin gesehenen Ableitungsregeln besteht.

Frage: Ist K korrekt?

Frage: Ist K vollständig?

Widerlegungsvollständigkeit

- Offensichtlich wollen wir **korrekte** Kalküle
- Brauchen wir immer einen **vollständigen** Kalkül?

Widerlegungsvollständigkeit

- Offensichtlich wollen wir **korrekte** Kalküle
- Brauchen wir immer einen **vollständigen** Kalkül?
- **Widerlegungstheorem:**
 $WB \cup \{\varphi\}$ ist unerfüllbar gdw. $WB \models \neg\varphi$
- Daraus folgt, dass $WB \models \varphi$ gdw. $WB \cup \{\neg\varphi\}$ ist unerfüllbar
- Wir können also das **allgemeine** Folgerungsproblem auf einen **Test auf Unerfüllbarkeit** reduzieren.

Widerlegungsvollständigkeit

- Offensichtlich wollen wir **korrekte** Kalküle
- Brauchen wir immer einen **vollständigen** Kalkül?
- **Widerlegungstheorem:**
 $WB \cup \{\varphi\}$ ist unerfüllbar gdw. $WB \models \neg\varphi$
- Daraus folgt, dass $WB \models \varphi$ gdw. $WB \cup \{\neg\varphi\}$ ist unerfüllbar
- Wir können also das **allgemeine** Folgerungsproblem auf einen **Test auf Unerfüllbarkeit** reduzieren.
- Wir verwenden in Kalkülen das spezielle Symbol $\square$ für (bewiesenermaßen) unerfüllbare Formeln.

Widerlegungsvollständigkeit

- Offensichtlich wollen wir **korrekte** Kalküle
- Brauchen wir immer einen **vollständigen** Kalkül?
- **Widerlegungstheorem:**
 $WB \cup \{\varphi\}$ ist unerfüllbar gdw. $WB \models \neg\varphi$
- Daraus folgt, dass $WB \models \varphi$ gdw. $WB \cup \{\neg\varphi\}$ ist unerfüllbar
- Wir können also das **allgemeine** Folgerungsproblem auf einen **Test auf Unerfüllbarkeit** reduzieren.
- Wir verwenden in Kalkülen das spezielle Symbol $\square$ für (bewiesenermaßen) unerfüllbare Formeln.

Definition (Widerlegungsvollständigkeit)

Ein Kalkül K ist **widerlegungsvollständig**, wenn für alle unerfüllbaren WB gilt, dass $WB \vdash_K \square$.

Fragen



Fragen?

Resolutionskalkül

Resolution: Idee

- **Resolution** ist ein widerlegungsvollständiger Kalkül für Wissensbasen in **konjunktiver Normalform**.

Resolution: Idee

- **Resolution** ist ein widerlegungsvollständiger Kalkül für Wissensbasen in **konjunktiver Normalform**.
- Alle Wissensbasen können in äquivalente Formeln in KNF transformiert werden.
 - Transformation kann exponentielle Zeit benötigen.
 - Alternative: Effiziente Transformation in **erfüllbarkeitsäquivalente** Formeln (nicht Stoff dieser Vorlesung)

Resolution: Idee

- **Resolution** ist ein widerlegungsvollständiger Kalkül für Wissensbasen in **konjunktiver Normalform**.
- Alle Wissensbasen können in äquivalente Formeln in KNF transformiert werden.
 - Transformation kann exponentielle Zeit benötigen.
 - Alternative: Effiziente Transformation in **erfüllbarkeitsäquivalente** Formeln (nicht Stoff dieser Vorlesung)
- Zeige $WB \models \varphi$ durch Ableitbarkeit $WB \cup \{\neg\varphi\} \vdash_R \square$ mit **Resolutionskalkül R** .

Resolution: Idee

- **Resolution** ist ein widerlegungsvollständiger Kalkül für Wissensbasen in **konjunktiver Normalform**.
- Alle Wissensbasen können in äquivalente Formeln in KNF transformiert werden.
 - Transformation kann exponentielle Zeit benötigen.
 - Alternative: Effiziente Transformation in **erfüllbarkeitsäquivalente** Formeln (nicht Stoff dieser Vorlesung)
- Zeige $WB \models \varphi$ durch Ableitbarkeit $WB \cup \{\neg\varphi\} \vdash_R \square$ mit **Resolutionskalkül R** .
- Resolution kann exponentielle Zeit benötigen.
- Dies ist wahrscheinlich für **alle** widerlegungsvollständigen Beweismethoden der Fall. $\rightsquigarrow$ **Komplexitätstheorie**

Wissensbasen als Klauselmengen

Vereinfachte Notation von Wissensbasen in KNF

- **Formel** in KNF als **Menge von Klauseln**
(wegen Kommutativität, Idempotenz, Assoziativität von $\wedge$)
- **Menge von Formeln** ebenfalls als **Menge von Klauseln**
- **Klausel** als **Menge von Literalen**
(wegen Kommutativität, Idempotenz, Assoziativität von $\vee$)
- Wissensbasis als **Menge von Mengen von Literalen**

Wissensbasen als Klauselmengen

Vereinfachte Notation von Wissensbasen in KNF

- **Formel** in KNF als **Menge von Klauseln**
(wegen Kommutativität, Idempotenz, Assoziativität von $\wedge$)
- **Menge von Formeln** ebenfalls als **Menge von Klauseln**
- **Klausel** als **Menge von Literalen**
(wegen Kommutativität, Idempotenz, Assoziativität von $\vee$)
- Wissensbasis als **Menge von Mengen von Literalen**

Beispiel

WB = $\{(P \vee P), ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge R),$
 $((\neg Q \vee \neg R \vee S) \wedge P)\}$

als Klauselmenge:

Wissensbasen als Klauselmengen

Vereinfachte Notation von Wissensbasen in KNF

- **Formel** in KNF als **Menge von Klauseln**
(wegen Kommutativität, Idempotenz, Assoziativität von $\wedge$)
- **Menge von Formeln** ebenfalls als **Menge von Klauseln**
- **Klausel** als **Menge von Literalen**
(wegen Kommutativität, Idempotenz, Assoziativität von $\vee$)
- Wissensbasis als **Menge von Mengen von Literalen**

Beispiel

$$\text{WB} = \{(P \vee P), ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge R), \\ ((\neg Q \vee \neg R \vee S) \wedge P)\}$$

als Klauselmenge:

$$\Delta = \{\{P\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg P, R\}, \{R\}, \{\neg Q, \neg R, S\}\}$$

Resolutionsregel

Der **Resolutionskalkül** besteht aus einer einzigen Regel, genannt **Resolutionsregel**:

$$\frac{K_1 \cup \{L\}, K_2 \cup \{\neg L\}}{K_1 \cup K_2},$$

wobei K_1 und K_2 (möglicherweise leere) Klauseln sind und L eine atomare Formel ist.

Resolutionsregel

Der **Resolutionskalkül** besteht aus einer einzigen Regel, genannt **Resolutionsregel**:

$$\frac{K_1 \cup \{L\}, K_2 \cup \{\neg L\}}{K_1 \cup K_2},$$

wobei K_1 und K_2 (möglicherweise leere) Klauseln sind und L eine atomare Formel ist.

Leiten wir die leere Klausel ab, schreiben wir $\square$ statt $\{\}$.

Resolutionsregel

Der **Resolutionskalkül** besteht aus einer einzigen Regel, genannt **Resolutionsregel**:

$$\frac{K_1 \cup \{L\}, K_2 \cup \{\neg L\}}{K_1 \cup K_2},$$

wobei K_1 und K_2 (möglicherweise leere) Klauseln sind und L eine atomare Formel ist.

Leiten wir die leere Klausel ab, schreiben wir $\square$ statt $\{\}$.

Terminologie:

- L und $\neg L$ sind die **Resolutionslitterale**,
- $K_1 \cup \{L\}$ and $K_2 \cup \{\neg L\}$ sind die **Elternklauseln** und
- $K_1 \cup K_2$ ist der **Resolvent**.

Resolutionsbeweis

Definition (Resolutionsbeweis)

Ein **Resolutionsbeweis** einer Klausel D aus einer Wissensbasis Δ ist eine Sequenz von Klauseln $K_1, \dots, K_n$ mit

- $K_n = D$ und
- für alle $i \in \{1, \dots, n\}$:
 - $K_i \in \Delta$, oder
 - K_i ist Resolvent zweier Klauseln aus $\{K_1, \dots, K_{i-1}\}$.

Wenn es einen Resolutionsbeweis von D aus Δ gibt, sagen wir D kann **mit Resolution aus Δ abgeleitet** werden und schreiben $\Delta \vdash_R D$.

Anmerkung: Resolution ist ein **korrekter**, **widerlegungsvollständiger**, aber **unvollständiger** Kalkül.

Resolutionsbeweis: Beispiel

Resolutionsbeweis zum Testen einer logischen Folgerung: Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow (Q \wedge R))\}$.

Zeige per Resolution, dass $WB \models (R \vee S)$.

Resolutionsbeweis: Beispiel

Resolutionsbeweis zum Testen einer logischen Folgerung: Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow (Q \wedge R))\}$.

Zeige per Resolution, dass $WB \models (R \vee S)$.

Drei Schritte:

- 1 Reduziere logische Folgerung auf Unerfüllbarkeit.
- 2 Transformiere Wissensbasis in Klauselform (KNF).
- 3 Leite leere Klausel $\square$ mit Resolution ab.

Resolutionsbeweis: Beispiel

Resolutionsbeweis zum Testen einer logischen Folgerung: Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow (Q \wedge R))\}$.

Zeige per Resolution, dass $WB \models (R \vee S)$.

Drei Schritte:

- 1 Reduziere logische Folgerung auf Unerfüllbarkeit.
- 2 Transformiere Wissensbasis in Klauselform (KNF).
- 3 Leite leere Klausel $\square$ mit Resolution ab.

Schritt 1: Reduziere logische Folgerung auf Unerfüllbarkeit.

Resolutionsbeweis: Beispiel

Resolutionsbeweis zum Testen einer logischen Folgerung: Beispiel

Gegeben: $WB = \{P, (P \rightarrow (Q \wedge R))\}$.

Zeige per Resolution, dass $WB \models (R \vee S)$.

Drei Schritte:

- 1 Reduziere logische Folgerung auf Unerfüllbarkeit.
- 2 Transformiere Wissensbasis in Klauselform (KNF).
- 3 Leite leere Klausel $\square$ mit Resolution ab.

Schritt 1: Reduziere logische Folgerung auf Unerfüllbarkeit.

$WB \models (R \vee S)$ gdw $WB \cup \{\neg(R \vee S)\}$ ist unerfüllbar.

Betrachte daher

$WB' = WB \cup \{\neg(R \vee S)\} = \{P, (P \rightarrow (Q \wedge R)), \neg(R \vee S)\}$.

...

Resolutionsbeweis: Beispiel (Fortsetzung)

Resolution zum Testen einer logischen Folgerung: Beispiel (Forts.)

$WB' = \{P, (P \rightarrow (Q \wedge R)), \neg(R \vee S)\}.$

Schritt 2: Transformiere Wissensbasis in Klauselform (KNF).

Resolutionsbeweis: Beispiel (Fortsetzung)

Resolution zum Testen einer logischen Folgerung: Beispiel (Forts.)

$WB' = \{P, (P \rightarrow (Q \wedge R)), \neg(R \vee S)\}.$

Schritt 2: Transformiere Wissensbasis in Klauselform (KNF).

- P
 $\rightsquigarrow$ Klauseln: $\{P\}$
- $P \rightarrow (Q \wedge R) \equiv (\neg P \vee (Q \wedge R)) \equiv ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R))$
 $\rightsquigarrow$ Klauseln: $\{\neg P, Q\}, \{\neg P, R\}$
- $\neg(R \vee S) \equiv (\neg R \wedge \neg S)$
 $\rightsquigarrow$ Klauseln: $\{\neg R\}, \{\neg S\}$

Resolutionsbeweis: Beispiel (Fortsetzung)

Resolution zum Testen einer logischen Folgerung: Beispiel (Forts.)

$WB' = \{P, (P \rightarrow (Q \wedge R)), \neg(R \vee S)\}$.

Schritt 2: Transformiere Wissensbasis in Klauselform (KNF).

- P
 $\rightsquigarrow$ Klauseln: $\{P\}$
- $P \rightarrow (Q \wedge R) \equiv (\neg P \vee (Q \wedge R)) \equiv ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R))$
 $\rightsquigarrow$ Klauseln: $\{\neg P, Q\}, \{\neg P, R\}$
- $\neg(R \vee S) \equiv (\neg R \wedge \neg S)$
 $\rightsquigarrow$ Klauseln: $\{\neg R\}, \{\neg S\}$

$\Delta = \{\{P\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg P, R\}, \{\neg R\}, \{\neg S\}\}$

...

Resolutionsbeweis: Beispiel (Fortsetzung)

Resolution zum Testen einer logischen Folgerung: Beispiel (Forts.)

$$\Delta = \{\{P\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg P, R\}, \{\neg R\}, \{\neg S\}\}$$

Schritt 3: Leite leere Klausel $\square$ mit Resolution ab.

- $K_1 = \{P\}$ (aus Δ)
- $K_2 = \{\neg P, Q\}$ (aus Δ)
- $K_3 = \{\neg P, R\}$ (aus Δ)
- $K_4 = \{\neg R\}$ (aus Δ)
- $K_5 = \{Q\}$ (aus K_1 und K_2)
- $K_6 = \{\neg P\}$ (aus K_3 und K_4)
- $K_7 = \square$ (aus K_1 und K_6)

Hinweis: Es gibt kürzere Beweise. (Zum Beispiel?)

Noch ein Beispiel

Noch ein Resolutionsbeispiel

Zeige mit Resolution, dass $WB \models \text{TrinktBier}$, wobei

$$WB = \{(\neg \text{TrinktBier} \rightarrow \text{IsstFisch}), \\ ((\text{IsstFisch} \wedge \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstEiscreme}), \\ ((\text{IsstEiscreme} \vee \neg \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstFisch})\}.$$

Grösseres Beispiel: Blutgruppen

Wir wissen folgendes:

- Ist Test T positiv, hat die Person Blutgruppe A oder AB.
- Ist Test S positiv, hat die Person Blutgruppe B oder AB.
- Hat eine Person Blutgruppe A, dann ist Test T positiv.
- Hat eine Person Blutgruppe B, dann ist Test S positiv.
- Hat eine Person Blutgruppe AB, sind beide Tests positiv.
- Jede Person hat genau eine der Blutgruppen A, B, AB, 0.
- Für eine gegebene Person ist Test T positiv und Test S negativ.

Zeigen Sie, dass die gegebene Person Blutgruppe A oder 0 hat.

Fragen



Fragen?

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- **Logische Folgerung** $WB \models \varphi$ erlaubt auf Basis der Semantik zu schliessen, dass φ aus WB folgt.
- Ein korrekter **Kalkül** erlaubt solche Schlussfolgerungen auf Basis **rein syntaktischer Ableitungen** $WB \vdash \varphi$.
- **Vollständige Kalküle** meist nicht notwendig: Für viele Fragestellungen reicht **Widerlegungsvollständigkeit**.
- **Resolutionskalkül** ist **korrekt** und **widerlegungsvollständig**.

Weiterführende Themen

Es gibt noch viele Bereiche der Aussagenlogik, die wir in dieser Vorlesung nicht behandeln.

- **Resolutionsstrategien**, um Resolution in der Praxis so effizient wie möglich zu machen
- Andere Beweissysteme, wie zum Beispiel **Tableauxbeweise**
- Algorithmen zur **Modellkonstruktion**, zum Beispiel das Davis-Putnam-Logemann-Loveland-Verfahren (DPLL)