

Theorie der Informatik

4. Aussagenlogik II

Malte Helmert Gabriele Röger

Universität Basel

4. März 2015

Was bisher geschah

- **Aussagenlogik** basiert auf atomaren Aussagen
- **Syntax** legt fest, was wohlgeformte Formeln sind
- **Semantik** definiert, wann eine Formel wahr ist
- **Wahrheitsbelegungen** sind wichtigste Grundlage der Semantik.
- **Erfüllbarkeit** und **Gültigkeit** sind wichtige Formeleigenschaften.
- **Wahrheitstafeln** betrachten systematisch alle möglichen Wahrheitsbelegungen.
- Wahrheitstafeln nur für kleine Formeln nützlich

Äquivalenzen

Äquivalente Formeln

Definition (Äquivalenz aussagenlogischer Formeln)

Zwei aussagenlogische Formeln φ und ψ über A sind **(logisch) äquivalent** ($\varphi \equiv \psi$), falls für **alle Wahrheitsbelegungen** $\mathcal{I}$ für A gilt, dass **$\mathcal{I} \models \varphi$ genau dann wenn $\mathcal{I} \models \psi$** .

Äquivalente Formeln: Beispiel

$$((\varphi \vee \psi) \vee \chi) \equiv (\varphi \vee (\psi \vee \chi))$$

$\mathcal{I} \models \varphi$	$\mathcal{I} \models \psi$	$\mathcal{I} \models \chi$	$\mathcal{I} \models (\varphi \vee \psi)$	$\mathcal{I} \models (\psi \vee \chi)$	$\mathcal{I} \models ((\varphi \vee \psi) \vee \chi)$	$\mathcal{I} \models (\varphi \vee (\psi \vee \chi))$
Nein	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein
Nein	Nein	Ja	Nein	Ja	Ja	Ja
Nein	Ja	Nein	Ja	Ja	Ja	Ja
Nein	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja
Ja	Nein	Nein	Ja	Nein	Ja	Ja
Ja	Nein	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja
Ja	Ja	Nein	Ja	Ja	Ja	Ja
Ja	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja

Einige Äquivalenzen

$$(\varphi \wedge \varphi) \equiv \varphi$$

$$(\varphi \vee \varphi) \equiv \varphi$$

(Idempotenz)

Einige Äquivalenzen

$$(\varphi \wedge \varphi) \equiv \varphi$$

$$(\varphi \vee \varphi) \equiv \varphi$$

(Idempotenz)

$$(\varphi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \varphi)$$

$$(\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi)$$

(Kommutativität)

Einige Äquivalenzen

$$(\varphi \wedge \varphi) \equiv \varphi$$

$$(\varphi \vee \varphi) \equiv \varphi$$

(Idempotenz)

$$(\varphi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \varphi)$$

$$(\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi)$$

(Kommutativität)

$$((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi) \equiv (\varphi \wedge (\psi \wedge \chi))$$

$$((\varphi \vee \psi) \vee \chi) \equiv (\varphi \vee (\psi \vee \chi))$$

(Assoziativität)

Einige Äquivalenzen

$$(\varphi \wedge \varphi) \equiv \varphi$$

$$(\varphi \vee \varphi) \equiv \varphi$$

(Idempotenz)

$$(\varphi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \varphi)$$

$$(\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi)$$

(Kommutativität)

$$((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi) \equiv (\varphi \wedge (\psi \wedge \chi))$$

$$((\varphi \vee \psi) \vee \chi) \equiv (\varphi \vee (\psi \vee \chi))$$

(Assoziativität)

$$(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \equiv \varphi$$

$$(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) \equiv \varphi$$

(Absorption)

Einige Äquivalenzen

$$(\varphi \wedge \varphi) \equiv \varphi$$

$$(\varphi \vee \varphi) \equiv \varphi$$

(Idempotenz)

$$(\varphi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \varphi)$$

$$(\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi)$$

(Kommutativität)

$$((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi) \equiv (\varphi \wedge (\psi \wedge \chi))$$

$$((\varphi \vee \psi) \vee \chi) \equiv (\varphi \vee (\psi \vee \chi))$$

(Assoziativität)

$$(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \equiv \varphi$$

$$(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) \equiv \varphi$$

(Absorption)

$$(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$$

$$(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \equiv ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$$

(Distributivität)

Mehr Äquivalenzen

$$\neg\neg\varphi \equiv \varphi$$

(Doppelnegation)

Mehr Äquivalenzen

$$\neg\neg\varphi \equiv \varphi$$

(Doppelnegation)

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

(De Morgansche Regeln)

Mehr Äquivalenzen

$$\neg\neg\varphi \equiv \varphi$$

(Doppelnegation)

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

(De Morgansche Regeln)

$$(\varphi \vee \psi) \equiv \varphi \text{ falls } \varphi \text{ Tautologie}$$

$$(\varphi \wedge \psi) \equiv \psi \text{ falls } \varphi \text{ Tautologie}$$

(Tautologieregeln)

Mehr Äquivalenzen

$$\neg\neg\varphi \equiv \varphi \quad (\text{Doppelnegation})$$

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \quad (\text{De Morgansche Regeln})$$

$$(\varphi \vee \psi) \equiv \varphi \text{ falls } \varphi \text{ Tautologie}$$

$$(\varphi \wedge \psi) \equiv \psi \text{ falls } \varphi \text{ Tautologie} \quad (\text{Tautologieregeln})$$

$$(\varphi \vee \psi) \equiv \psi \text{ falls } \varphi \text{ unerfüllbar}$$

$$(\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi \text{ falls } \varphi \text{ unerfüllbar} \quad (\text{Unerfüllbarkeitsregeln})$$

Anwendung von Äquivalenzen: Beispiel

$$(P \wedge (\neg Q \vee P)) \equiv ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge P)) \quad (\text{Distributivität})$$

Anwendung von Äquivalenzen: Beispiel

$$\begin{aligned}
 (P \wedge (\neg Q \vee P)) &\equiv ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge P)) && \text{(Distributivität)} \\
 &\equiv ((P \wedge \neg Q) \vee P) && \text{(Idempotenz)}
 \end{aligned}$$

Anwendung von Äquivalenzen: Beispiel

$$\begin{aligned}
 (P \wedge (\neg Q \vee P)) &\equiv ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge P)) && \text{(Distributivität)} \\
 &\equiv ((P \wedge \neg Q) \vee P) && \text{(Idempotenz)} \\
 &\equiv (P \vee (P \wedge \neg Q)) && \text{(Kommutativität)}
 \end{aligned}$$

Anwendung von Äquivalenzen: Beispiel

$$\begin{aligned}
 (P \wedge (\neg Q \vee P)) &\equiv ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge P)) && \text{(Distributivität)} \\
 &\equiv ((P \wedge \neg Q) \vee P) && \text{(Idempotenz)} \\
 &\equiv (P \vee (P \wedge \neg Q)) && \text{(Kommutativität)} \\
 &\equiv P && \text{(Absorption)}
 \end{aligned}$$

Ersetzbarkeitstheorem

Theorem (Ersetzbarkeitstheorem)

Seien φ und φ' äquivalente aussagenlogische Formeln über A . Sei ψ eine aussagenlogische Formel mit (mindestens) einem Vorkommen der Teilformel φ . Dann ist ψ äquivalent zu ψ' , wobei ψ' aus ψ hervorgeht, indem ein Vorkommen von φ in ψ durch φ' ersetzt wird.

Ersetzbarkeitstheorem

Theorem (Ersetzbarkeitstheorem)

Seien φ und φ' äquivalente aussagenlogische Formeln über A . Sei ψ eine aussagenlogische Formel mit (mindestens) einem Vorkommen der Teilformel φ . Dann ist ψ äquivalent zu ψ' , wobei ψ' aus ψ hervorgeht, indem ein Vorkommen von φ in ψ durch φ' ersetzt wird.

Beweis.

Beweis durch Induktion über den Formelaufbau von ψ .

Induktionsanfang: Falls ψ eine atomare Formel ist, dann gilt $\psi = \varphi$. Da damit $\psi' = \varphi'$ gelten muss, folgt die Aussage direkt aus $\varphi \equiv \varphi'$.

...

Ersetzbarkeitstheorem

Beweis (Fortsetzung).

Induktionsvoraussetzung: Das Ersetzbarkeitstheorem gilt für alle Teilformeln von ψ .

Ersetzbarkeitstheorem

Beweis (Fortsetzung).

Induktionsvoraussetzung: Das Ersetzbarkeitstheorem gilt für alle Teilformeln von ψ .

Induktionsschritt: Falls $\psi = \varphi$, gilt das gleiche Argument wie beim Induktionsanfang. Sonst müssen wir drei Fälle unterscheiden.

Ersetzbarkeitstheorem

Beweis (Fortsetzung).

Induktionsvoraussetzung: Das Ersetzbarkeitstheorem gilt für alle Teilformeln von ψ .

Induktionsschritt: Falls $\psi = \varphi$, gilt das gleiche Argument wie beim Induktionsanfang. Sonst müssen wir drei Fälle unterscheiden.

Fall 1: ψ hat den Aufbau $\psi = \neg\chi$.

Damit hat ψ' den Aufbau $\psi' = \neg\chi'$, wobei χ' aus χ durch die Ersetzung der Teilformel φ durch φ' hervorgeht. Nach Induktionsvoraussetzung ist χ äquivalent zu χ' . Die Äquivalenz von ψ und ψ' folgt dann aus der semantischen Definition von „ $\neg$ “.

...

Ersetzbarkeitstheorem

Beweis (Fortsetzung).

Fall 2: ψ hat den Aufbau $\psi = (\chi_1 \vee \chi_2)$.

Dann kommt φ in χ_1 oder in χ_2 vor. Wir betrachten den Fall χ_1 (Fall χ_2 analog). Dann ist nach Induktionsvoraussetzung χ_1 äquivalent zu χ'_1 , welches aus χ_1 durch Ersetzen der Teilformel φ durch φ' hervorgeht. Aus der Definition von „ $\vee$ “ folgt, dass $\psi \equiv (\chi'_1 \vee \chi_2) = \psi'$.



Ersetzbarkeitstheorem

Beweis (Fortsetzung).

Fall 2: ψ hat den Aufbau $\psi = (\chi_1 \vee \chi_2)$.

Dann kommt φ in χ_1 oder in χ_2 vor. Wir betrachten den Fall χ_1 (Fall χ_2 analog). Dann ist nach Induktionsvoraussetzung χ_1 äquivalent zu χ'_1 , welches aus χ_1 durch Ersetzen der Teilformel φ durch φ' hervorgeht. Aus der Definition von „ $\vee$ “ folgt, dass $\psi \equiv (\chi'_1 \vee \chi_2) = \psi'$.

Fall 3: φ hat den Aufbau $\varphi = (\chi_1 \wedge \chi_2)$.

Beweis analog zu Fall 2.



Fragen



Fragen?

Vereinfachte Schreibweise

Klammern

Assoziativität:

$$((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi) \equiv (\varphi \wedge (\psi \wedge \chi))$$

$$((\varphi \vee \psi) \vee \chi) \equiv (\varphi \vee (\psi \vee \chi))$$

- Klammerung bei einer Konjunktion als Teilformel einer Konjunktion beeinflusst nicht, ob Interpretation ein Modell der Formel ist
- Bei Disjunktionen analog
- Können in diesen Fällen Klammern weglassen und Semantik einer beliebigen Klammerung verwenden
- Beispiel: $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4)$ statt $((A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3)) \wedge A_4)$
- Beispiel: $(\neg A \vee (B \wedge C) \vee D)$ statt $((\neg A \vee (B \wedge C)) \vee D)$

Klammern

Können wir Klammern dann immer weglassen und beliebige Klammerung annehmen? → **Nein!**

Klammern

Können wir Klammern dann immer weglassen und beliebige Klammerung annehmen? → **Nein!**

$$((\varphi \wedge \psi) \vee \chi) \not\equiv (\varphi \wedge (\psi \vee \chi))$$

Klammern

Können wir Klammern dann immer weglassen und beliebige Klammerung annehmen? → **Nein!**

$$((\varphi \wedge \psi) \vee \chi) \not\equiv (\varphi \wedge (\psi \vee \chi))$$

Was sollte dann $\varphi \wedge \psi \vee \chi$ bedeuten?

Klammerung per Konvention

Oftmals werden Klammern in bestimmten Fällen dennoch weggelassen und eine **implizite** Klammerung angenommen:

- $\neg$ bindet stärker als $\wedge$
- $\wedge$ bindet stärker als $\vee$
- $\vee$ bindet stärker als $\rightarrow$ oder $\leftrightarrow$

Klammerung per Konvention

Oftmals werden Klammern in bestimmten Fällen dennoch weggelassen und eine **implizite** Klammerung angenommen:

- $\neg$ bindet stärker als $\wedge$
- $\wedge$ bindet stärker als $\vee$
- $\vee$ bindet stärker als $\rightarrow$ oder $\leftrightarrow$

Beispiel

$A \vee \neg C \wedge B \rightarrow A \vee \neg D$ entspricht $A \vee \neg C \wedge B \rightarrow A \vee \neg D$

Klammerung per Konvention

Oftmals werden Klammern in bestimmten Fällen dennoch weggelassen und eine **implizite** Klammerung angenommen:

- $\neg$ bindet stärker als $\wedge$
- $\wedge$ bindet stärker als $\vee$
- $\vee$ bindet stärker als $\rightarrow$ oder $\leftrightarrow$

Beispiel

$A \vee \neg C \wedge B \rightarrow A \vee \neg D$ entspricht $A \vee (\neg C \wedge B) \rightarrow A \vee \neg D$

Klammerung per Konvention

Oftmals werden Klammern in bestimmten Fällen dennoch weggelassen und eine **implizite** Klammerung angenommen:

- $\neg$ bindet stärker als $\wedge$
- $\wedge$ bindet stärker als $\vee$
- $\vee$ bindet stärker als $\rightarrow$ oder $\leftrightarrow$

Beispiel

$A \vee \neg C \wedge B \rightarrow A \vee \neg D$ entspricht $(A \vee (\neg C \wedge B)) \rightarrow (A \vee \neg D)$

Klammerung per Konvention

Oftmals werden Klammern in bestimmten Fällen dennoch weggelassen und eine **implizite** Klammerung angenommen:

- $\neg$ bindet stärker als $\wedge$
- $\wedge$ bindet stärker als $\vee$
- $\vee$ bindet stärker als $\rightarrow$ oder $\leftrightarrow$

Beispiel

$A \vee \neg C \wedge B \rightarrow A \vee \neg D$ entspricht $((A \vee (\neg C \wedge B)) \rightarrow (A \vee \neg D))$

Klammerung per Konvention

Oftmals werden Klammern in bestimmten Fällen dennoch weggelassen und eine **implizite** Klammerung angenommen:

- $\neg$ bindet stärker als $\wedge$
- $\wedge$ bindet stärker als $\vee$
- $\vee$ bindet stärker als $\rightarrow$ oder $\leftrightarrow$

Beispiel

$A \vee \neg C \wedge B \rightarrow A \vee \neg D$ entspricht $((A \vee (\neg C \wedge B)) \rightarrow (A \vee \neg D))$

- ▷ Oftmals schwerer zu lesen
- ▷ Fehleranfälliger
- ▷ Verwenden wir daher in dieser Vorlesung nicht.

Kurzschreibweise für Konjunktionen und Disjunktionen

Kurzschreibweise für Addition:

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Kurzschreibweise für Konjunktionen und Disjunktionen

Kurzschreibweise für Addition:

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Analog:

$$(\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i) = (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$$

$$(\bigvee_{i=1}^n \varphi_i) = (\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_n)$$

Kurzschreibweise für Konjunktionen und Disjunktionen

Kurzschreibweise für Addition:

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\sum_{x \in \{x_1, \dots, x_n\}} x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Analog:

$$(\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i) = (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$$

$$(\bigvee_{i=1}^n \varphi_i) = (\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_n)$$

Kurzschreibweise für Konjunktionen und Disjunktionen

Kurzschreibweise für Addition:

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\sum_{x \in \{x_1, \dots, x_n\}} x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Analog (möglich wegen Kommutativität von $\wedge$ und $\vee$):

$$(\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i) = (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$$

$$(\bigvee_{i=1}^n \varphi_i) = (\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_n)$$

$$(\bigwedge_{\varphi \in X} \varphi) = (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$$

$$(\bigvee_{\varphi \in X} \varphi) = (\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_n)$$

$$\text{für } X = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$$

Kurzschreibweise: Randfälle

Gilt $\mathcal{I} \models \psi$ bei

$$\psi = (\bigwedge_{\varphi \in X} \varphi) \text{ und } \psi = (\bigvee_{\varphi \in X} \varphi)$$

wenn $X = \{\}$ oder $X = \{\chi\}$?

Kurzschreibweise: Randfälle

Gilt $\mathcal{I} \models \psi$ bei

$$\psi = (\bigwedge_{\varphi \in X} \varphi) \text{ und } \psi = (\bigvee_{\varphi \in X} \varphi)$$

wenn $X = \{\}$ oder $X = \{\chi\}$?

Konvention:

- $(\bigwedge_{\varphi \in \{\}} \varphi)$ ist Tautologie.
- $(\bigvee_{\varphi \in \{\}} \varphi)$ ist unerfüllbar.
- $(\bigwedge_{\varphi \in \{\chi\}} \varphi) = (\bigvee_{\varphi \in \{\chi\}} \varphi) = \chi$

Kurzschreibweise: Randfälle

Gilt $\mathcal{I} \models \psi$ bei

$$\psi = (\bigwedge_{\varphi \in X} \varphi) \text{ und } \psi = (\bigvee_{\varphi \in X} \varphi)$$

wenn $X = \{\}$ oder $X = \{\chi\}$?

Konvention:

- $(\bigwedge_{\varphi \in \{\}} \varphi)$ ist Tautologie.
- $(\bigvee_{\varphi \in \{\}} \varphi)$ ist unerfüllbar.
- $(\bigwedge_{\varphi \in \{\chi\}} \varphi) = (\bigvee_{\varphi \in \{\chi\}} \varphi) = \chi$

▷ Warum?

Fragen



Fragen?

Normalformen

Warum Normalformen?

- Eine **Normalform** ist eine Darstellung mit **bestimmten syntaktischen Eigenschaften**.
- Bedingung für sinnvolle Normalform: **Jede Formel** muss logisch **äquivalente Formel in Normalform** besitzen.
- Vorteile:
 - Können Beweise auf Formeln in Normalform beschränken
 - Können Algorithmen nur für Eingaben in Normalform angeben

Etwas Terminologie

- Ein **Literal** ist eine atomare Formel oder die Negation einer atomaren Formel (z.B. A und $\neg A$).

Etwas Terminologie

- Ein **Literal** ist eine atomare Formel oder die Negation einer atomaren Formel (z.B. A und $\neg A$).
- Eine **Klausel** ist eine Disjunktion von Literalen (z.B. $(Q \vee \neg P \vee \neg S \vee R)$).

Etwas Terminologie

- Ein **Literal** ist eine atomare Formel oder die Negation einer atomaren Formel (z.B. A und $\neg A$).
- Eine **Klausel** ist eine Disjunktion von Literalen (z.B. $(Q \vee \neg P \vee \neg S \vee R)$).
- Ein **Monom** ist eine Konjunktion von Literalen (z.B. $(Q \wedge \neg P \wedge \neg S \wedge R)$).

Etwas Terminologie

- Ein **Literal** ist eine atomare Formel oder die Negation einer atomaren Formel (z.B. A und $\neg A$).
- Eine **Klausel** ist eine Disjunktion von Literalen (z.B. $(Q \vee \neg P \vee \neg S \vee R)$).
- Ein **Monom** ist eine Konjunktion von Literalen (z.B. $(Q \wedge \neg P \wedge \neg S \wedge R)$).

Die Begriffe **Klausel** und **Monom** werden auch für den Randfall mit **nur einem Literal** verwendet.

Terminologie: Beispiele

Beispiele

- $((P \vee \neg Q) \wedge P)$
- $(\neg Q \wedge R)$
- $(P \vee \neg Q)$
- $\neg P$
- $(P \rightarrow Q)$

Terminologie: Beispiele

Beispiele

- $((P \vee \neg Q) \wedge P)$ ist weder Literal, Klausel, noch Monom
- $(\neg Q \wedge R)$
- $(P \vee \neg Q)$
- $\neg P$
- $(P \rightarrow Q)$

Terminologie: Beispiele

Beispiele

- $((P \vee \neg Q) \wedge P)$ ist weder Literal, Klausel, noch Monom
- $(\neg Q \wedge R)$ ist Monom
- $(P \vee \neg Q)$
- $\neg P$
- $(P \rightarrow Q)$

Terminologie: Beispiele

Beispiele

- $((P \vee \neg Q) \wedge P)$ ist weder Literal, Klausel, noch Monom
- $(\neg Q \wedge R)$ ist Monom
- $(P \vee \neg Q)$ ist Klausel
- $\neg P$
- $(P \rightarrow Q)$

Terminologie: Beispiele

Beispiele

- $((P \vee \neg Q) \wedge P)$ ist weder Literal, Klausel, noch Monom
- $(\neg Q \wedge R)$ ist Monom
- $(P \vee \neg Q)$ ist Klausel
- $\neg P$ ist Literal, Klausel und Monom
- $(P \rightarrow Q)$

Terminologie: Beispiele

Beispiele

- $((P \vee \neg Q) \wedge P)$ ist weder Literal, Klausel, noch Monom
- $(\neg Q \wedge R)$ ist Monom
- $(P \vee \neg Q)$ ist Klausel
- $\neg P$ ist Literal, Klausel und Monom
- $(P \rightarrow Q)$ ist weder Literal, Klausel, noch Monom

Konjunktive Normalform

Definition (Konjunktive Normalform)

Eine Formel ist in **konjunktiver Normalform (KNF)** wenn sie eine Konjunktion von Klauseln ist, d.h., wenn sie die Form

$$\left(\bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij} \right) \right)$$

mit $n, m_i > 0$ (für $1 \leq i \leq n$) hat, wobei die L_{ij} Literale sind.

Beispiel

$((\neg P \vee Q) \wedge R \wedge (P \vee \neg S))$ ist in KNF.

Disjunktive Normalform

Definition (Disjunktive Normalform)

Eine Formel ist in **disjunktiver Normalform (DNF)**, wenn sie eine Disjunktion von Monomen ist, d.h., wenn sie die Form

$$\left(\bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{ij} \right) \right)$$

mit $n, m_i > 0$ (für $1 \leq i \leq n$) hat, wobei die L_{ij} Literale sind.

Beispiel

$((\neg P \wedge Q) \vee R \vee (P \wedge \neg S))$ ist in DNF.

KNF und DNF: Beispiele

Beispiele

- $((P \vee \neg Q) \wedge P)$
- $((R \vee Q) \wedge P \wedge (R \vee S))$
- $(P \vee (\neg Q \wedge R))$
- $((P \vee \neg Q) \rightarrow P)$
- P

KNF und DNF: Beispiele

Beispiele

- $((P \vee \neg Q) \wedge P)$ ist in KNF
- $((R \vee Q) \wedge P \wedge (R \vee S))$
- $(P \vee (\neg Q \wedge R))$
- $((P \vee \neg Q) \rightarrow P)$
- P

KNF und DNF: Beispiele

Beispiele

- $((P \vee \neg Q) \wedge P)$ ist in KNF
- $((R \vee Q) \wedge P \wedge (R \vee S))$ ist in KNF
- $(P \vee (\neg Q \wedge R))$
- $((P \vee \neg Q) \rightarrow P)$
- P

KNF und DNF: Beispiele

Beispiele

- $((P \vee \neg Q) \wedge P)$ ist in KNF
- $((R \vee Q) \wedge P \wedge (R \vee S))$ ist in KNF
- $(P \vee (\neg Q \wedge R))$ ist in DNF
- $((P \vee \neg Q) \rightarrow P)$
- P

KNF und DNF: Beispiele

Beispiele

- $((P \vee \neg Q) \wedge P)$ ist in KNF
- $((R \vee Q) \wedge P \wedge (R \vee S))$ ist in KNF
- $(P \vee (\neg Q \wedge R))$ ist in DNF
- $((P \vee \neg Q) \rightarrow P)$ ist weder in KNF noch in DNF
- P

KNF und DNF: Beispiele

Beispiele

- $((P \vee \neg Q) \wedge P)$ ist in KNF
- $((R \vee Q) \wedge P \wedge (R \vee S))$ ist in KNF
- $(P \vee (\neg Q \wedge R))$ ist in DNF
- $((P \vee \neg Q) \rightarrow P)$ ist weder in KNF noch in DNF
- P ist in KNF und in DNF

Herstellung von KNF (und DNF)

Algorithmus zur Herstellung von KNF

- 1 Ersetze Abkürzungen mit $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ durch tatsächliche Formel ($(\rightarrow)$ -Eliminierung und $(\leftrightarrow)$ -Eliminierung).
 $\rightsquigarrow$ Formelstruktur: nur $\vee$, $\wedge$, $\neg$
- 2 Schiebe Negationen mit De Morgan und Doppelnegation nach innen.
 $\rightsquigarrow$ Formelstruktur: nur $\vee$, $\wedge$, Literale
- 3 Verteile $\vee$ über $\wedge$ mit Distributivität (genaugenommen auch Kommutativität).
 $\rightsquigarrow$ Formelstruktur: KNF
- 4 Optional: Vereinfache die Formel am Ende oder auch zwischendurch (z.B. mit Idempotenz).

Hinweis: Für DNF, verteile stattdessen $\wedge$ über $\vee$.

Frage: Laufzeit?

KNF herstellen: Beispiel

Herstellung von konjunktiver Normalform

Gegeben: $\varphi = (((P \wedge \neg Q) \vee R) \rightarrow (P \vee \neg(S \vee T)))$

KNF herstellen: Beispiel

Herstellung von konjunktiver Normalform

Gegeben: $\varphi = (((P \wedge \neg Q) \vee R) \rightarrow (P \vee \neg(S \vee T)))$

$$\varphi \equiv (\neg((P \wedge \neg Q) \vee R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) \quad [\text{Schritt 1}]$$

KNF herstellen: Beispiel

Herstellung von konjunktiver Normalform

Gegeben: $\varphi = (((P \wedge \neg Q) \vee R) \rightarrow (P \vee \neg(S \vee T)))$

$$\varphi \equiv (\neg((P \wedge \neg Q) \vee R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) \quad [\text{Schritt 1}]$$

$$\equiv ((\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) \quad [\text{Schritt 2}]$$

KNF herstellen: Beispiel

Herstellung von konjunktiver Normalform

Gegeben: $\varphi = (((P \wedge \neg Q) \vee R) \rightarrow (P \vee \neg(S \vee T)))$

$$\varphi \equiv (\neg((P \wedge \neg Q) \vee R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) \quad [\text{Schritt 1}]$$

$$\equiv ((\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) \quad [\text{Schritt 2}]$$

$$\equiv (((\neg P \vee Q) \wedge \neg R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) \quad [\text{Schritt 2}]$$

KNF herstellen: Beispiel

Herstellung von konjunktiver Normalform

Gegeben: $\varphi = (((P \wedge \neg Q) \vee R) \rightarrow (P \vee \neg(S \vee T)))$

$$\varphi \equiv (\neg((P \wedge \neg Q) \vee R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) \quad [\text{Schritt 1}]$$

$$\equiv ((\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) \quad [\text{Schritt 2}]$$

$$\equiv (((\neg P \vee Q) \wedge \neg R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) \quad [\text{Schritt 2}]$$

$$\equiv (((\neg P \vee Q) \wedge \neg R) \vee P \vee (\neg S \wedge \neg T)) \quad [\text{Schritt 2}]$$

KNF herstellen: Beispiel

Herstellung von konjunktiver Normalform

Gegeben: $\varphi = (((P \wedge \neg Q) \vee R) \rightarrow (P \vee \neg(S \vee T)))$

$$\varphi \equiv (\neg((P \wedge \neg Q) \vee R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) \quad [\text{Schritt 1}]$$

$$\equiv ((\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) \quad [\text{Schritt 2}]$$

$$\equiv (((\neg P \vee Q) \wedge \neg R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) \quad [\text{Schritt 2}]$$

$$\equiv (((\neg P \vee Q) \wedge \neg R) \vee P \vee (\neg S \wedge \neg T)) \quad [\text{Schritt 2}]$$

$$\begin{aligned} &\equiv ((\neg P \vee Q \vee P \vee (\neg S \wedge \neg T)) \wedge \\ &\quad (\neg R \vee P \vee (\neg S \wedge \neg T))) \quad [\text{Schritt 3}] \end{aligned}$$

KNF herstellen: Beispiel

Herstellung von konjunktiver Normalform

Gegeben: $\varphi = (((P \wedge \neg Q) \vee R) \rightarrow (P \vee \neg(S \vee T)))$

$$\varphi \equiv (\neg((P \wedge \neg Q) \vee R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) \quad [\text{Schritt 1}]$$

$$\equiv ((\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) \quad [\text{Schritt 2}]$$

$$\equiv (((\neg P \vee Q) \wedge \neg R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) \quad [\text{Schritt 2}]$$

$$\equiv (((\neg P \vee Q) \wedge \neg R) \vee P \vee (\neg S \wedge \neg T)) \quad [\text{Schritt 2}]$$

$$\equiv ((\neg P \vee Q \vee P \vee (\neg S \wedge \neg T)) \wedge (\neg R \vee P \vee (\neg S \wedge \neg T))) \quad [\text{Schritt 3}]$$

$$\equiv (\neg R \vee P \vee (\neg S \wedge \neg T)) \quad [\text{Schritt 4}]$$

KNF herstellen: Beispiel

Herstellung von konjunktiver Normalform

Gegeben: $\varphi = (((P \wedge \neg Q) \vee R) \rightarrow (P \vee \neg(S \vee T)))$

$$\varphi \equiv (\neg((P \wedge \neg Q) \vee R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) \quad [\text{Schritt 1}]$$

$$\equiv ((\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) \quad [\text{Schritt 2}]$$

$$\equiv (((\neg P \vee Q) \wedge \neg R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) \quad [\text{Schritt 2}]$$

$$\equiv (((\neg P \vee Q) \wedge \neg R) \vee P \vee (\neg S \wedge \neg T)) \quad [\text{Schritt 2}]$$

$$\equiv ((\neg P \vee Q \vee P \vee (\neg S \wedge \neg T)) \wedge (\neg R \vee P \vee (\neg S \wedge \neg T))) \quad [\text{Schritt 3}]$$

$$\equiv (\neg R \vee P \vee (\neg S \wedge \neg T)) \quad [\text{Schritt 4}]$$

$$\equiv ((\neg R \vee P \vee \neg S) \wedge (\neg R \vee P \vee \neg T)) \quad [\text{Schritt 3}]$$

DNF herstellen: Beispiel

Herstellung von disjunktiver Normalform

Gegeben: $\varphi = (((P \wedge \neg Q) \vee R) \rightarrow (P \vee \neg(S \vee T)))$

$$\varphi \equiv (\neg((P \wedge \neg Q) \vee R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) \quad [\text{Schritt 1}]$$

$$\equiv ((\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) \quad [\text{Schritt 2}]$$

$$\equiv (((\neg P \vee Q) \wedge \neg R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) \quad [\text{Schritt 2}]$$

$$\equiv (((\neg P \vee Q) \wedge \neg R) \vee P \vee (\neg S \wedge \neg T)) \quad [\text{Schritt 2}]$$

DNF herstellen: Beispiel

Herstellung von disjunktiver Normalform

Gegeben: $\varphi = (((P \wedge \neg Q) \vee R) \rightarrow (P \vee \neg(S \vee T)))$

$$\varphi \equiv (\neg((P \wedge \neg Q) \vee R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) \quad [\text{Schritt 1}]$$

$$\equiv ((\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) \quad [\text{Schritt 2}]$$

$$\equiv (((\neg P \vee Q) \wedge \neg R) \vee P \vee \neg(S \vee T)) \quad [\text{Schritt 2}]$$

$$\equiv (((\neg P \vee Q) \wedge \neg R) \vee P \vee (\neg S \wedge \neg T)) \quad [\text{Schritt 2}]$$

$$\equiv ((\neg P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg R) \vee P \vee (\neg S \wedge \neg T)) \quad [\text{Schritt 3}]$$

Existenz von äquivalenter Formel in Normalformen

Theorem

Für jede Formel φ gibt es eine logisch äquivalente Formel in KNF und eine logisch äquivalente Formel in DNF.

Existenz von äquivalenter Formel in Normalformen

Theorem

Für jede Formel φ gibt es eine logisch äquivalente Formel in KNF und eine logisch äquivalente Formel in DNF.

- „gibt es eine“ heisst immer „gibt es mindestens eine“. Sonst würde man „gibt es genau eine“ schreiben.

Existenz von äquivalenter Formel in Normalformen

Theorem

Für jede Formel φ gibt es eine logisch äquivalente Formel in KNF und eine logisch äquivalente Formel in DNF.

- „gibt es eine“ heisst immer „gibt es mindestens eine“. Sonst würde man „gibt es genau eine“ schreiben.
- Intuition: Algorithmus zur Herstellung von Normalform funktioniert mit beliebigen Ausgangsformeln und verwendet nur Äquivalenzumformungen.

Existenz von äquivalenter Formel in Normalformen

Theorem

Für jede Formel φ gibt es eine logisch äquivalente Formel in KNF und eine logisch äquivalente Formel in DNF.

- „gibt es eine“ heisst immer „gibt es mindestens eine“. Sonst würde man „gibt es genau eine“ schreiben.
- Intuition: Algorithmus zur Herstellung von Normalform funktioniert mit beliebigen Ausgangsformeln und verwendet nur Äquivalenzumformungen.
- Echter Beweis ginge z.B. über Induktion über den Aufbau der Formeln.

Weitere Theoreme

Theorem

Eine Formel in KNF ist eine Tautologie gdw. jede Klausel eine Tautologie ist.

Weitere Theoreme

Theorem

Eine Formel in KNF ist eine Tautologie gdw. jede Klausel eine Tautologie ist.

Theorem

Eine Formel in DNF ist erfüllbar gdw. mindestens ein Monom erfüllbar ist.

Weitere Theoreme

Theorem

Eine Formel in KNF ist eine Tautologie gdw. jede Klausel eine Tautologie ist.

Theorem

Eine Formel in DNF ist erfüllbar gdw. mindestens ein Monom erfüllbar ist.

▷ Beides leicht anhand von Semantik der Aussagenlogik zu zeigen.

Fragen



Fragen?

Formelmengen

Wissensbasis: Beispiel



Wenn nicht TrinktBier, dann IsstFisch.
 Wenn IsstFisch und TrinktBier, dann
 nicht IsstEiscreme.
 Wenn IsstEiscreme oder nicht
 TrinktBier, dann nicht IsstFisch.

$$WB = \{(\neg \text{TrinktBier} \rightarrow \text{IsstFisch}), \\ ((\text{IsstFisch} \wedge \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstEiscreme}), \\ ((\text{IsstEiscreme} \vee \neg \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstFisch})\}$$

Modelle für Formelmengen

Definition (Modell für Wissensbasis)

Sei WB eine **Wissensbasis** über A , d.h. eine Menge von aussagenlogischen Formeln über A .

Eine **Wahrheitsbelegung** $\mathcal{I}$ für A ist ein **Modell für WB**, wenn $\mathcal{I}$ ein **Modell für jede Formel** $\varphi \in \text{WB}$ ist.

Eigenschaften von Formelmengen

Eine Wissensbasis WB ist

- **erfüllbar**, falls WB mindestens ein Modell besitzt.
- **unerfüllbar**, falls WB nicht erfüllbar ist.
- **gültig** (oder **Tautologie**), falls jede Wahrheitsbelegung ein Modell für WB ist.
- **falsifizierbar**, falls WB keine Tautologie ist.

Beispiel I

Welche der Eigenschaften hat $WB = \{(A \wedge \neg B), \neg(B \vee A)\}$?

Beispiel I

Welche der Eigenschaften hat $WB = \{(A \wedge \neg B), \neg(B \vee A)\}$?

WB ist **unerfüllbar**:

Für jedes Modell $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models (A \wedge \neg B)$ gilt $\mathcal{I}(A) = 1$.

Damit gilt $\mathcal{I} \models (B \vee A)$ und daher nicht $\mathcal{I} \models \neg(B \vee A)$.

Beispiel I

Welche der Eigenschaften hat $WB = \{(A \wedge \neg B), \neg(B \vee A)\}$?

WB ist **unerfüllbar**:

Für jedes Modell $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models (A \wedge \neg B)$ gilt $\mathcal{I}(A) = 1$.

Damit gilt $\mathcal{I} \models (B \vee A)$ und daher nicht $\mathcal{I} \models \neg(B \vee A)$.

Daraus folgt direkt **falsifizierbar**, **nicht erfüllbar**, **keine Tautologie**.

Beispiel II

Welche der Eigenschaften hat

$$\begin{aligned} \text{WB} = \{ & (\neg \text{TrinktBier} \rightarrow \text{IsstFisch}), \\ & ((\text{IsstFisch} \wedge \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstEiscreme}), \\ & ((\text{IsstEiscreme} \vee \neg \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstFisch}) \} ? \end{aligned}$$

Beispiel II

Welche der Eigenschaften hat

$$\begin{aligned} \text{WB} = \{ & (\neg \text{TrinktBier} \rightarrow \text{IsstFisch}), \\ & ((\text{IsstFisch} \wedge \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstEiscreme}), \\ & ((\text{IsstEiscreme} \vee \neg \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstFisch}) \} \end{aligned}$$

- **erfüllbar**, z.B. mit
 $\mathcal{I} = \{\text{IsstFisch} \mapsto 1, \text{TrinktBier} \mapsto 1, \text{IsstEiscreme} \mapsto 0\}$
- damit **nicht unerfüllbar**
- **falsifizierbar**, z.B. mit
 $\mathcal{I} = \{\text{IsstFisch} \mapsto 0, \text{TrinktBier} \mapsto 0, \text{IsstEiscreme} \mapsto 1\}$
- damit **nicht gültig**

Fragen



Fragen?

Logische Folgerung

Logische Folgerung: Motivation

Worin besteht das Geheimnis Ihres langen Lebens?



Ich halte mich streng an Diätregeln: Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich immer Fisch. Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit habe, verzichte ich auf Eiscreme. Wenn ich Eiscreme habe oder Bier meide, dann rühre ich Fisch nicht an.

Behauptung: Die Frau trinkt Bier zu jeder Mahlzeit.

Wie können wir das folgern?

Logische Folgerung

Definition (Logische Konsequenz)

Sei WB eine Menge von Formeln und φ eine Formel.

Wir sagen, dass φ **logisch** aus WB **folgt** (auch: φ ist eine **logische Konsequenz** von WB, symbolisch **$WB \models \varphi$**), wenn **alle Modelle** für WB auch Modelle für φ sind.

Logische Folgerung

Definition (Logische Konsequenz)

Sei WB eine Menge von Formeln und φ eine Formel.

Wir sagen, dass φ **logisch** aus WB **folgt** (auch: φ ist eine **logische Konsequenz** von WB, symbolisch **$WB \models \varphi$**), wenn **alle Modelle** für WB auch Modelle für φ sind.

Achtung: Das Symbol $\models$ ist „überladen“: **$WB \models \varphi$ vs. $\mathcal{I} \models \varphi$** .

Logische Folgerung

Definition (Logische Konsequenz)

Sei WB eine Menge von Formeln und φ eine Formel.

Wir sagen, dass φ **logisch** aus WB **folgt** (auch: φ ist eine **logische Konsequenz** von WB, symbolisch **$WB \models \varphi$**), wenn **alle Modelle** für WB auch Modelle für φ sind.

Achtung: Das Symbol $\models$ ist „überladen“: **$WB \models \varphi$ vs. $\mathcal{I} \models \varphi$.**

Was ist, wenn **WB unerfüllbar** oder die **leere Menge** ist?

Logische Folgerung: Beispiel

Sei $\varphi = \text{TrinktBier}$ und

$$\begin{aligned} \text{WB} = \{ & (\neg \text{TrinktBier} \rightarrow \text{IsstFisch}), \\ & ((\text{IsstFisch} \wedge \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstEiscreme}), \\ & ((\text{IsstEiscreme} \vee \neg \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstFisch}) \}. \end{aligned}$$

Zeige: $\text{WB} \models \varphi$

Logische Folgerung: Beispiel

Sei $\varphi = \text{TrinktBier}$ und

$$\begin{aligned} \text{WB} = \{ & (\neg \text{TrinktBier} \rightarrow \text{IsstFisch}), \\ & ((\text{IsstFisch} \wedge \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstEiscreme}), \\ & ((\text{IsstEiscreme} \vee \neg \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstFisch}) \}. \end{aligned}$$

Zeige: $\text{WB} \models \varphi$

Beweis.

Beweis durch Widerspruch: Angenommen $\mathcal{I}$ ist ein Modell von WB, aber $\mathcal{I} \not\models \text{TrinktBier}$. Dann gilt $\mathcal{I} \models \neg \text{TrinktBier}$. Da $\mathcal{I}$ Modell von WB, gilt auch $\mathcal{I} \models (\neg \text{TrinktBier} \rightarrow \text{IsstFisch})$ und damit $\mathcal{I} \models \text{IsstFisch}$. Mit der analogen Argumentation erhalten wir über $\mathcal{I} \models ((\text{IsstEiscreme} \vee \neg \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstFisch})$ das Ergebnis $\mathcal{I} \models \neg \text{IsstFisch}$ und damit $\mathcal{I} \not\models \text{IsstFisch}$. $\rightsquigarrow$ Widerspruch □

Wichtige Sätze zur logischen Folgerung

Theorem (Deduktionstheorem)

$WB \cup \{\varphi\} \models \psi \text{ gdw. } WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$

Wichtige Sätze zur logischen Folgerung

Theorem (Deduktionstheorem)

$WB \cup \{\varphi\} \models \psi \text{ gdw. } WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$

Theorem (Kontrapositionstheorem)

$WB \cup \{\varphi\} \models \neg\psi \text{ gdw. } WB \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$

Wichtige Sätze zur logischen Folgerung

Theorem (Deduktionstheorem)

$WB \cup \{\varphi\} \models \psi$ gdw. $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$

Theorem (Kontrapositionstheorem)

$WB \cup \{\varphi\} \models \neg\psi$ gdw. $WB \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$

Theorem (Widerlegungstheorem)

$WB \cup \{\varphi\}$ ist unerfüllbar gdw. $WB \models \neg\varphi$

Beweis des Deduktionstheorems

Deduktionstheorem: $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$ gdw. $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$

Beweis.

“ $\Rightarrow$ ”: Voraussetzung ist, dass $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$.

Wir müssen zeigen, dass $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$, d.h. dass alle Modelle für WB die Formel $(\varphi \rightarrow \psi)$ erfüllen. Betrachte ein beliebiges Modell $\mathcal{I}$ für WB. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Beweis des Deduktionstheorems

Deduktionstheorem: $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$ gdw. $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$

Beweis.

“ $\Rightarrow$ ”: Voraussetzung ist, dass $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$.

Wir müssen zeigen, dass $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$, d.h. dass alle Modelle für WB die Formel $(\varphi \rightarrow \psi)$ erfüllen. Betrachte ein beliebiges Modell $\mathcal{I}$ für WB. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- **Fall 1:** $\mathcal{I} \models \varphi$.

Dann ist $\mathcal{I}$ ein Modell für $WB \cup \{\varphi\}$ und, wegen der Voraussetzung, $\mathcal{I} \models \psi$. Daraus können wir schliessen, dass $\mathcal{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)$.

Beweis des Deduktionstheorems

Deduktionstheorem: $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$ gdw. $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$

Beweis.

“ $\Rightarrow$ ”: Voraussetzung ist, dass $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$.

Wir müssen zeigen, dass $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$, d.h. dass alle Modelle für WB die Formel $(\varphi \rightarrow \psi)$ erfüllen. Betrachte ein beliebiges Modell $\mathcal{I}$ für WB. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- **Fall 1:** $\mathcal{I} \models \varphi$.

Dann ist $\mathcal{I}$ ein Modell für $WB \cup \{\varphi\}$ und, wegen der Voraussetzung, $\mathcal{I} \models \psi$. Daraus können wir schliessen, dass $\mathcal{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)$.

- **Fall 2:** $\mathcal{I} \not\models \varphi$.

Wir können direkt schliessen, dass $\mathcal{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)$.

...

...

Beweis des Deduktionstheorems

Deduktionstheorem: $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$ gdw. $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$

Beweis (Fortsetzung).

“ $\Leftarrow$ ”: Voraussetzung ist, dass $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$.

Wir müssen zeigen, dass $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$, d.h., dass alle Modelle für $WB \cup \{\varphi\}$ die Formel ψ erfüllen. Betrachte ein beliebiges solches Modell $\mathcal{I}$ für $WB \cup \{\varphi\}$.

Beweis des Deduktionstheorems

Deduktionstheorem: $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$ gdw. $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$

Beweis (Fortsetzung).

“ $\Leftarrow$ ”: Voraussetzung ist, dass $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$.

Wir müssen zeigen, dass $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$, d.h., dass alle Modelle für $WB \cup \{\varphi\}$ die Formel ψ erfüllen. Betrachte ein beliebiges solches Modell $\mathcal{I}$ für $WB \cup \{\varphi\}$.

Nach Definition gilt $\mathcal{I} \models \varphi$. Da $\mathcal{I}$ ein Modell für WB ist, folgt mit der Voraussetzung, dass $\mathcal{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)$.

Beweis des Deduktionstheorems

Deduktionstheorem: $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$ gdw. $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$

Beweis (Fortsetzung).

“ $\Leftarrow$ ”: Voraussetzung ist, dass $WB \models (\varphi \rightarrow \psi)$.

Wir müssen zeigen, dass $WB \cup \{\varphi\} \models \psi$, d.h., dass alle Modelle für $WB \cup \{\varphi\}$ die Formel ψ erfüllen. Betrachte ein beliebiges solches Modell $\mathcal{I}$ für $WB \cup \{\varphi\}$.

Nach Definition gilt $\mathcal{I} \models \varphi$. Da $\mathcal{I}$ ein Modell für WB ist, folgt mit der Voraussetzung, dass $\mathcal{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)$.

Zusammen ergibt sich $\mathcal{I} \models (\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)) \equiv (\varphi \wedge \psi)$,
woraus folgt, dass $\mathcal{I} \models \psi$.



Beweis des Kontrapositionstheorems

Kontrapositionstheorem: $WB \cup \{\varphi\} \models \neg\psi$ gdw. $WB \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$

Beweis.

Wegen des Deduktionstheorems gilt

$WB \cup \{\varphi\} \models \neg\psi$ gdw. $WB \models (\varphi \rightarrow \neg\psi)$.

Aus dem gleichen Grund gilt

$WB \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$ gdw. $WB \models (\psi \rightarrow \neg\varphi)$.

Beweis des Kontrapositionstheorems

Kontrapositionstheorem: $WB \cup \{\varphi\} \models \neg\psi$ gdw. $WB \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$

Beweis.

Wegen des Deduktionstheorems gilt

$WB \cup \{\varphi\} \models \neg\psi$ gdw. $WB \models (\varphi \rightarrow \neg\psi)$.

Aus dem gleichen Grund gilt

$WB \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$ gdw. $WB \models (\psi \rightarrow \neg\varphi)$.

Zudem gilt $(\varphi \rightarrow \neg\psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi) \equiv (\neg\psi \vee \neg\varphi) \equiv (\psi \rightarrow \neg\varphi)$.

Beweis des Kontrapositionstheorems

Kontrapositionstheorem: $WB \cup \{\varphi\} \models \neg\psi$ gdw. $WB \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$

Beweis.

Wegen des Deduktionstheorems gilt

$WB \cup \{\varphi\} \models \neg\psi$ gdw. $WB \models (\varphi \rightarrow \neg\psi)$.

Aus dem gleichen Grund gilt

$WB \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$ gdw. $WB \models (\psi \rightarrow \neg\varphi)$.

Zudem gilt $(\varphi \rightarrow \neg\psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi) \equiv (\neg\psi \vee \neg\varphi) \equiv (\psi \rightarrow \neg\varphi)$.

Zusammen ergibt sich wie gefordert

$WB \cup \{\varphi\} \models \neg\psi$

gdw. $WB \models (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

gdw. $WB \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$.



Beweis des Widerlegungstheorems

Übungsaufgabe

Fragen



Fragen?

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- **Logische Äquivalenz** erfasst, wann Formeln **semantisch gleich** sind.
- **Äquivalenzumformung** dient zur Vereinfachung von Formeln und zur Herstellung von Normalformen.
- Formel in **KNF** ist Konjunktion von Klauseln.
- Formel in **DNF** ist Disjunktion von Monomen.
- Jede Formel hat **äquivalente Formeln in DNF und in KNF**.
- **Wissensbasis** ist Formelmenge, die gegebene Informationen beschreibt.
- **Logische Folgerung** $WB \models \varphi$ erlaubt auf Basis der Semantik zu schliessen, dass φ aus WB folgt.