

Theorie der Informatik

3. Aussagenlogik I

Malte Helmert Gabriele Röger

Universität Basel

2. März 2015

Theorie der Informatik

2. März 2015 — 3. Aussagenlogik I

3.1 Motivation

3.2 Syntax

3.3 Semantik

3.4 Formaleigenschaften

3.5 Zusammenfassung

3.1 Motivation

Warum Logik?

- ▶ Formalisierung der Mathematik
 - ▶ Was ist ein valider Beweis?
 - ▶ Was sind gültige Schlussfolgerungen aus einer Menge von Axiomen?
- ▶ Basis vieler Werkzeuge in der Informatik
 - ▶ Beschreibung von Schaltkreisen
 - ▶ Repräsentation des Wissens von Agenten (z.B. Robotern)
 - ▶ Formale Spezifikation von Programmen und Überprüfung des Verhalten eines Systems mit automatisierter Modellprüfung
 - ▶ ...

Beispiel: Gruppentheorie

Beispiel für Gruppe: $(\mathbb{Z}, +, 0)$

Menge der ganzen Zahlen mit Addition und neutralem Element 0

Gruppenaxiome für allgemeines $(G, \circ, e)$:

- ① Für alle $x, y, z \in G$ gilt $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.
- ② Für alle $x \in G$ gilt $x \circ e = x$.
- ③ Für alle $x \in G$ gibt es ein $y \in G$ mit $x \circ y = e$.

Beispiel: Gruppentheorie

Theorem (Existenz des Linksinversen)

Sei $(G, \circ, e)$ eine Gruppe. Für alle $x \in G$ gibt es ein $y \in G$ mit $y \circ x = e$.

Beweis.

Betrachte ein beliebiges x . Wegen 3. gibt es ein y mit $x \circ y = e$ (*). Analog gibt es für dieses y ein z mit $y \circ z = e$ (**). Es gilt:

$$\begin{aligned}
 y \circ x &\stackrel{(2.)}{=} (y \circ x) \circ e \stackrel{(**)}{=} (y \circ x) \circ (y \circ z) \\
 &\stackrel{(1.)}{=} y \circ (x \circ (y \circ z)) \stackrel{(1.)}{=} y \circ ((x \circ y) \circ z) \\
 &\stackrel{(*)}{=} y \circ (e \circ z) \stackrel{(1.)}{=} (y \circ e) \circ z \\
 &\stackrel{(2.)}{=} y \circ z \stackrel{(**)}{=} e
 \end{aligned}$$



Allgemeine Fragestellung

Allgemeine Fragestellung

- ▶ Gegeben eine Menge (eine **Wissensbasis**) von Axiomen (z.B. Gruppenaxiome)
- ▶ Was können wir daraus **folgern**? (z.B. Theorem über Existenz des Linksinversen)
- ▶ Und auf welcher Basis dürfen wir argumentieren? (Warum folgt z.B. aus Gruppenaxiom 2., dass $y \circ x = (y \circ x) \circ e$?)

Ziel: „Mechanisches“ Beweisen

- ▶ formales „Spiel mit Buchstaben“
- ▶ losgelöst von einer konkreten Bedeutung

Aussagenlogik

Aussagenlogik ist einfache Logik ohne Zahlen oder Objekte

Bausteine der Aussagenlogik

- ▶ **Aussage** ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch sein kann
- ▶ **Atomare Aussage** kann nicht weiter in Teilaussagen zerlegt werden
- ▶ **Junktoren** verbinden (Teil-)Aussagen zu neuen Aussagen

Beispiele für Bausteine



Wenn ich kein **Bier** zu einer Mahlzeit **trin-**
ke, dann **habe** ich immer **Fisch**.
Immer wenn ich **Fisch** und **Bier** zur sel-
ben Mahlzeit habe, dann verzichte ich
auf **Eiscreme**.
Wenn ich **Eiscreme habe** oder **Bier** mei-
de, dann rühre ich **Fisch** nicht an.

- ▶ Jeder Satz ist eine Aussage, besteht aber wiederum aus Teilaussagen (z.B. „Eiscreme habe oder Bier meide“).
- ▶ Atomare Aussagen „**Trinkt Bier**“, „**Isst Fisch**“, „**Isst Eiscreme**“
- ▶ Junktoren „und“, „oder“, Verneinung, „wenn, dann“

Aufgabe aus U. Schöning: Logik für Informatiker
Foto mit freundlicher Genehmigung von graur razvan ionut / FreeDigitalPhotos.net

Beispiele für Bausteine



Wenn ich **kein** Bier zu einer Mahlzeit trin-
ke, **dann** habe ich immer Fisch.
Immer **wenn** ich Fisch **und** Bier zur sel-
ben Mahlzeit habe, **dann** **verzichte** ich
auf Eiscreme.
Wenn ich Eiscreme habe **oder** Bier mei-
de, **dann** rühre ich Fisch **nicht** an.

- ▶ Jeder Satz ist eine Aussage, besteht aber wiederum aus Teilaussagen (z.B. „Eiscreme habe oder Bier meide“).
- ▶ Atomare Aussagen „Trinkt Bier“, „Isst Fisch“, „Isst Eiscreme“
- ▶ Junktoren „**und**“, „**oder**“, **Verneinung**, „**wenn**“, **dann**“

Aufgabe aus U. Schöning: Logik für Informatiker
Foto mit freundlicher Genehmigung von graur razvan ionut / FreeDigitalPhotos.net

Probleme mit natürlicher Sprache



Wenn ich kein Bier **zu einer Mahlzeit**
trinke, dann habe ich **immer** Fisch.
Immer wenn ich Fisch und Bier **zur**
selben Mahlzeit habe, verzichte ich auf
Eiscreme.
Wenn ich Eiscreme habe oder Bier
meide, dann rühre ich Fisch nicht an.

- ▶ „**Irrelevante**“ Information

Aufgabe aus U. Schöning: Logik für Informatiker
Foto mit freundlicher Genehmigung von graur razvan ionut / FreeDigitalPhotos.net

Probleme mit natürlicher Sprache



Wenn ich **kein** Bier trinke, dann habe
ich Fisch.
Wenn ich Fisch und Bier habe, **verzichte**
ich auf Eiscreme.
Wenn ich Eiscreme habe oder Bier
meide, dann rühre ich Fisch **nicht** an.

- ▶ „**Irrelevante**“ Information
- ▶ Verschiedene Formulierungen für gleichen Junktor/gleiche Aussage

Aufgabe aus U. Schöning: Logik für Informatiker
Foto mit freundlicher Genehmigung von graur razvan ionut / FreeDigitalPhotos.net

Probleme mit natürlicher Sprache



Wenn nicht TrinktBier, dann IsstFisch.
 Wenn IsstFisch und TrinktBier, dann
 nicht IsstEiscreme.
 Wenn IsstEiscreme oder nicht
 TrinktBier, dann nicht IsstFisch.

- ▶ „Irrelevante“ Information
- ▶ Verschiedene Formulierungen für gleichen Junktor/gleiche Aussage

Aufgabe aus U. Schöning: Logik für Informatiker
 Foto mit freundlicher Genehmigung von graur razvan ionut / FreeDigitalPhotos.net

Wie geht es weiter?

- ▶ Was sind sinnvolle (wohldefinierte) Aneinanderreihung von atomaren Formeln und Junktoren?
 „wenn dann IsstEiscreme nicht oder TrinktBier und“ nicht sinnvoll
 → **Syntax**
- ▶ Was bedeutet es über eine Aussage zu sagen, dass sie wahr ist?
 Ist „TrinktBier und IsstFisch“ wahr?
 → **Semantik**
- ▶ Wann folgt eine Aussage aus einer anderen Aussage?
 Folgt „IsstFisch“ aus „Wenn TrinktBier, dann IsstFisch“?
 → **Logische Folgerung**

3.2 Syntax

Syntax der Aussagenlogik

Definition (Syntax der Aussagenlogik)

Sei A eine Menge von atomaren Aussagen. Die Menge der aussagenlogischen Formeln (über A) ist induktiv wie folgt definiert:

- ▶ Jedes **Atom** $a \in A$ ist eine aussagenlogische Formel über A .
- ▶ Ist ϕ eine aussagenlogische Formel über A , dann auch die **Negation** $\neg\phi$.
- ▶ Sind ϕ und ψ aussagenlogische Formeln über A , dann ist es auch die **Konjunktion** $(\phi \wedge \psi)$.
- ▶ Sind ϕ und ψ aussagenlogische Formeln über A , dann ist es auch die **Disjunktion** $(\phi \vee \psi)$.

Die **Implikation** $(\phi \rightarrow \psi)$ ist eine Abkürzung für $(\neg\phi \vee \psi)$.

Das **Bikonditional** $(\phi \leftrightarrow \psi)$ ist Abk. für $((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi))$.

Syntax: Beispiele

Welche der folgenden Zeichenfolgen sind aussagenlogische Formeln über der Menge aller möglichen Buchstabenfolgen?

- ▶ $(A \wedge (B \vee C))$
- ▶ $((\text{IsstFisch} \wedge \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstEiscreme})$
- ▶ $\neg(\wedge \text{Regen} \vee \text{Strassenass})$
- ▶ $\neg(\text{Regen} \vee \text{Strassenass})$
- ▶ $\neg(A = B)$
- ▶ $(A \wedge \neg(B \leftrightarrow C))$
- ▶ $(A \vee \neg(B \leftrightarrow C))$
- ▶ $((A \leq B) \wedge C)$
- ▶ $((A_1 \wedge A_2) \vee \neg(A_3 \leftrightarrow A_2))$

Welcher Art sind die Formeln (Atom, Konjunktion,...)?

3.3 Semantik

Bedeutung aussagenlogischer Formeln?

Aussagenlogische Formeln bisher bloss Zeichenfolgen ohne Bedeutung.

Was heisst z.B. $((\text{IsstFisch} \wedge \text{TrinktBier}) \rightarrow \neg \text{IsstEiscreme})$?

▷ Wir brauchen Semantik!

Semantik der Aussagenlogik

Definition (Semantik der Aussagenlogik)

Eine **Wahrheitsbelegung** (oder **Interpretation**) für eine Menge von atomaren Aussagen A ist eine Funktion $\mathcal{I} : A \rightarrow \{0, 1\}$. Eine aussagenlogische **Formel** ϕ (über A) **gilt unter Belegung** $\mathcal{I}$ (geschrieben $\mathcal{I} \models \phi$) nach folgender Definition:

- ▶ $\mathcal{I} \models a$ (für $a \in A$) gdw. $\mathcal{I}(a) = 1$
- ▶ $\mathcal{I} \models \neg\phi$ gdw. nicht $\mathcal{I} \models \phi$
- ▶ $\mathcal{I} \models (\phi \wedge \psi)$ gdw. $\mathcal{I} \models \phi$ und $\mathcal{I} \models \psi$
- ▶ $\mathcal{I} \models (\phi \vee \psi)$ gdw. $\mathcal{I} \models \phi$ oder $\mathcal{I} \models \psi$

Für $\mathcal{I} \models \phi$ sagen wir auch **$\mathcal{I}$ ist ein Modell für ϕ** .

Gilt $\mathcal{I} \models \phi$ nicht, schreiben wir das als $\mathcal{I} \not\models \phi$.

$\models$ ist nicht Teil der Formel, sondern ein Symbol der **Metasprache**.

Semantik: Beispiel

$$A = \{\text{TrinktBier}, \text{IsstFisch}, \text{IsstEiscreme}\}$$

$$\mathcal{I} = \{\text{TrinktBier} \mapsto 1, \text{IsstFisch} \mapsto 0, \text{IsstEiscreme} \mapsto 1\}$$

$$\phi = (\neg \text{TrinktBier} \rightarrow \text{IsstFisch})$$

Gilt $\mathcal{I} \models \phi$?

Semantik: Beispiel

$$\mathcal{I} \models \phi \text{ gdw. } \mathcal{I} \models (\neg \text{TrinktBier} \rightarrow \text{IsstFisch})$$

$$\text{gdw. } \mathcal{I} \models (\neg \neg \text{TrinktBier} \vee \text{IsstFisch})$$

$$\text{gdw. } \mathcal{I} \models \neg \neg \text{TrinktBier} \text{ oder } \mathcal{I} \models \text{IsstFisch}$$

$$\text{gdw. } \mathcal{I} \models \neg \neg \text{TrinktBier} \text{ oder } \mathcal{I}(\text{IsstFisch}) = 1$$

$$\text{gdw. } \mathcal{I} \models \neg \neg \text{TrinktBier}$$

$$\text{gdw. nicht } \mathcal{I} \models \neg \text{TrinktBier}$$

$$\text{gdw. nicht nicht } \mathcal{I} \models \text{TrinktBier}$$

$$\text{gdw. } \mathcal{I} \models \text{TrinktBier}$$

$$\text{gdw. } \mathcal{I}(\text{TrinktBier}) = 1$$

3.4 Formeleigenschaften

Eigenschaften von Formeln

Eine aussagenlogische Formel ϕ ist

- ▶ **erfüllbar**, falls ϕ mindestens ein Modell besitzt.
- ▶ **unerfüllbar**, falls ϕ nicht erfüllbar ist.
- ▶ **gültig** (oder **Tautologie**), falls ϕ unter jeder Wahrheitsbelegung gilt.
- ▶ **falsifizierbar**, falls ϕ keine Tautologie ist.

Wie zeigen wir, dass eine Formel eine dieser Eigenschaften hat?

Beispiele

- ▶ Zeigen Sie, dass $(A \wedge B)$ **erfüllbar** ist.
 $\mathcal{I} = \{A \mapsto 1, B \mapsto 1\}$
- ▶ Zeigen Sie, dass $(A \wedge B)$ **falsifizierbar** ist.
 $\mathcal{I} = \{A \mapsto 0, B \mapsto 1\}$
- ▶ Zeigen Sie, dass $(A \wedge B)$ **nicht gültig** ist.
Folgt direkt aus Falsifizierbarkeit
- ▶ Zeigen Sie, dass $(A \wedge B)$ **nicht unerfüllbar** ist.
Folgt direkt aus Erfüllbarkeit

Bisher alles durch Angabe **einer** Belegung gezeigt.

Was ist mit gültig, unerfüllbar, nicht erfüllbar, nicht falsifizierbar?

- ▷ Benötigen Aussagen über **alle möglichen** Belegungen

Wahrheitstafeln

Werte für alle möglichen Belegungen aus, ob sie ein Modell für die betrachtete Formel sind.

$\mathcal{I}(A)$	$\mathcal{I} \models \neg A$
0	Ja
1	Nein

$\mathcal{I}(A)$	$\mathcal{I}(B)$	$\mathcal{I} \models (A \wedge B)$	$\mathcal{I}(A)$	$\mathcal{I}(B)$	$\mathcal{I} \models (A \vee B)$
0	0	Nein	0	0	Nein
0	1	Nein	0	1	Ja
1	0	Nein	1	0	Ja
1	1	Ja	1	1	Ja

Wahrheitstafeln allgemein

Betrachte alle Möglichkeiten, wie Belegungen die kleinsten Teilformeln (nicht) erfüllen können, und werte jeweils aus, ob sie ein Modell für die betrachtete Gesamtformel sind.

$\mathcal{I} \models \phi$	$\mathcal{I} \models \psi$	$\mathcal{I} \models (\phi \wedge \psi)$
Nein	Nein	Nein
Nein	Ja	Nein
Ja	Nein	Nein
Ja	Ja	Ja

Übung: Wahrheitstafel für $(\phi \rightarrow \psi)$

Wahrheitstafeln für Formeleigenschaften

Ist $\phi = ((A \rightarrow B) \vee (\neg B \rightarrow A))$ gültig, unerfüllbar,...?

$\mathcal{I}(A)$	$\mathcal{I}(B)$	$\mathcal{I} \models \neg B$	$\mathcal{I} \models (A \rightarrow B)$	$\mathcal{I} \models (\neg B \rightarrow A)$	$\mathcal{I} \models \phi$
0	0	Ja	Ja	Nein	Ja
0	1	Nein	Ja	Ja	Ja
1	0	Ja	Nein	Ja	Ja
1	1	Nein	Ja	Ja	Ja

Zusammenhang Formeleigenschaften und Wahrheitstabeln

Eine aussagenlogische Formel ϕ ist

- ▶ **erfüllbar**, falls ϕ mindestens ein Modell besitzt.
 - ▷ Ergebnis in mindestens einer Zeile „Ja“
- ▶ **unerfüllbar**, falls ϕ nicht erfüllbar ist.
 - ▷ Ergebnis in allen Zeilen „Nein“
- ▶ **gültig** (oder **Tautologie**), falls ϕ unter jeder Wahrheitsbelegung gilt.
 - ▷ Ergebnis in allen Zeilen „Ja“
- ▶ **falsifizierbar**, falls ϕ keine Tautologie ist.
 - ▷ Ergebnis in mindestens einer Zeile „Nein“

Grosser Nachteil von Wahrheitstabeln

Wie gross wird eine Wahrheitstafel mit n atomaren Aussagen?

1	2 Belegungen (Zeilen)
2	4 Belegungen (Zeilen)
3	8 Belegungen (Zeilen)
n	??? Belegungen

Einige Beispiele: $2^{10} = 1024$, $2^{20} = 1048576$, $2^{30} = 1073741824$

▷ Für grosse Formeln nicht praktikabel, brauchen andere Lösung
 ⇨ nächste Vorlesungsstunde

3.5 Zusammenfassung

Zusammenfassung

- ▶ **Aussagenlogik** basiert auf atomaren Aussagen
- ▶ **Syntax** legt fest, was wohlgeformte Formeln sind
- ▶ **Semantik** definiert, wann eine Formel wahr ist
- ▶ **Wahrheitsbelegungen** sind wichtigste Grundlage der Semantik.
- ▶ **Erfüllbarkeit** und **Gültigkeit** sind wichtige Formeleigenschaften.
- ▶ **Wahrheitstabeln** betrachten systematisch alle möglichen Wahrheitsbelegungen.
- ▶ Wahrheitstabeln nur für kleine Formeln nützlich