

Theorie der Informatik

1. Mathematische Grundlagen

Malte Helmert Gabriele Röger

Universität Basel

16. Februar 2015

Mengen, Tupel, Relationen

Mengen

- **Menge**: **ungeordnete Kollektion** unterscheidbarer Objekte, wobei jedes Objekt **höchstens einmal** enthalten ist.

Mengen

- **Menge**: **ungeordnete Kollektion** unterscheidbarer Objekte, wobei jedes Objekt **höchstens einmal** enthalten ist.
- Spezifikation:
 - **Explizit** durch Auflistung aller Elemente, z. B. $A = \{1, 2, 3\}$
 - **Implizit** durch Angabe einer **Eigenschaft**, die alle Elemente charakterisiert, z. B. $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ and } 1 \leq x \leq 3\}$
 - **Implizit** durch **Sequenzfortführung**, z. B.
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Mengen

- **Menge**: **ungeordnete Kollektion** unterscheidbarer Objekte, wobei jedes Objekt **höchstens einmal** enthalten ist.
- Spezifikation:
 - **Explizit** durch Auflistung aller Elemente, z. B. $A = \{1, 2, 3\}$
 - **Implizit** durch Angabe einer **Eigenschaft**, die alle Elemente charakterisiert, z. B. $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ and } 1 \leq x \leq 3\}$
 - **Implizit** durch **Sequenzfortführung**, z. B.
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $e \in M$: e ist in Menge M (ein **Element** der Menge)
- $e \notin M$: e ist nicht in Menge M

Mengen

- **Menge**: **ungeordnete Kollektion** unterscheidbarer Objekte, wobei jedes Objekt **höchstens einmal** enthalten ist.
- Spezifikation:
 - **Explizit** durch Auflistung aller Elemente, z. B. $A = \{1, 2, 3\}$
 - **Implizit** durch Angabe einer **Eigenschaft**, die alle Elemente charakterisiert, z. B. $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ and } 1 \leq x \leq 3\}$
 - **Implizit** durch **Sequenzfortführung**, z. B.
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $e \in M$: e ist in Menge M (ein **Element** der Menge)
- $e \notin M$: e ist nicht in Menge M
- **Leere Menge** $\emptyset = \{\}$

Mengen

- **Menge**: **ungeordnete Kollektion** unterscheidbarer Objekte, wobei jedes Objekt **höchstens einmal** enthalten ist.
- Spezifikation:
 - **Explizit** durch Auflistung aller Elemente, z. B. $A = \{1, 2, 3\}$
 - **Implizit** durch Angabe einer **Eigenschaft**, die alle Elemente charakterisiert, z. B. $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ and } 1 \leq x \leq 3\}$
 - **Implizit** durch **Sequenzfortführung**, z. B.
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $e \in M$: e ist in Menge M (ein **Element** der Menge)
- $e \notin M$: e ist nicht in Menge M
- **Leere Menge** $\emptyset = \{\}$
- **Mächtigkeit** oder **Kardinalität** $|M|$ einer endlichen Menge M : Anzahl der Elemente in M

Mengen

- $A \subseteq B$: A ist eine **Teilmenge** von B ,
d. h. jedes Element von A ist Element von B .
- $A \subset B$: A ist eine **echte Teilmenge** von B ,
d. h. $A \subseteq B$ und $A \neq B$.

Mengen

- $A \subseteq B$: A ist eine **Teilmenge** von B ,
d. h. jedes Element von A ist Element von B .
- $A \subset B$: A ist eine **echte Teilmenge** von B ,
d. h. $A \subseteq B$ und $A \neq B$.
- **Potenzmenge** $\mathcal{P}(M)$: Menge aller Teilmengen von M
z.B. $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Mengenoperationen

- **Schnitt** $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$

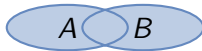


Mengenoperationen

- **Schnitt** $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$



- **Vereinigung** $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$

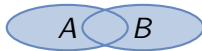


Mengenoperationen

- **Schnitt** $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$



- **Vereinigung** $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$



- **Differenz** $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$

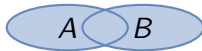


Mengenoperationen

- **Schnitt** $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$



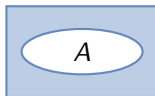
- **Vereinigung** $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$



- **Differenz** $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$



- **Komplement** $\bar{A} = B \setminus A$, wobei $A \subseteq B$ und B Menge aller (in jeweiligem Kontext) betrachteten Elemente



Tupel

- **k -Tupel**: (geordnete) Sequenz von k Objekten
- Angegeben als $(o_1, \dots, o_k)$ oder $\langle o_1, \dots, o_k \rangle$
- Ein Objekt kann mehrmals in einem Tupel vorkommen.

Tupel

- **k -Tupel**: (geordnete) Sequenz von k Objekten
- Angegeben als $(o_1, \dots, o_k)$ oder $\langle o_1, \dots, o_k \rangle$
- Ein Objekt kann mehrmals in einem Tupel vorkommen.
- Ein Objekt in einem Tupel wird **Komponente** genannt.
- Terminologie:
 - $k = 2$: (geordnetes) Paar
 - $k = 3$: Tripel
 - $k = 4$: Quadrupel
- Falls k aus Kontext klar ist, oft auch einfach **Tupel**

Kartesisches Produkt

- Für beliebige Mengen $M_1, M_2, \dots, M_n$ ist das **kartesische Produkt** $M_1 \times \dots \times M_n$ die Menge $M_1 \times \dots \times M_n = \{(o_1, \dots, o_n) \mid o_1 \in M_1, \dots, o_n \in M_n\}$.
- Beispiel: $M_1 = \{a, b, c\}, M_2 = \{1, 2\}$,
 $M_1 \times M_2 = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$

Kartesisches Produkt

- Für beliebige Mengen $M_1, M_2, \dots, M_n$ ist das **kartesische Produkt** $M_1 \times \dots \times M_n$ die Menge $M_1 \times \dots \times M_n = \{(o_1, \dots, o_n) \mid o_1 \in M_1, \dots, o_n \in M_n\}$.
- Beispiel: $M_1 = \{a, b, c\}, M_2 = \{1, 2\}$,
 $M_1 \times M_2 = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$
- Spezialfall: $M^k = M \times \dots \times M$ (k -mal)
- Beispiel mit $M = \{1, 2\}$:
 $M^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

Relationen

- Eine n -stellige **Relation** R über den Mengen $M_1, \dots, M_n$ ist eine Teilmenge ihres kartesischen Produkts:
 $R \subseteq M_1 \times \dots \times M_n.$
- Beispiel mit $M = \{1, 2\}$:
 $R_{\leq} \subseteq M^2$ als $R_{\leq} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$

Funktionen

Funktionen

Definition

Eine (totale) **Funktion** $f : D \rightarrow W$ (mit D, W Mengen) bildet **jeden Wert** aus dem **Definitionsbereich** D auf **genau einen Wert** aus dem **Wertebereich** W ab.

Funktionen

Definition

Eine (totale) **Funktion** $f : D \rightarrow W$ (mit D, W Mengen) bildet **jeden Wert** aus dem **Definitionsbereich** D auf **genau einen Wert** aus dem **Wertebereich** W ab.

Beispiel

- $\text{square} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $\text{square}(x) = x^2$

Funktionen

Definition

Eine (totale) **Funktion** $f : D \rightarrow W$ (mit D, W Mengen) bildet **jeden Wert** aus dem **Definitionsbereich** D auf **genau einen Wert** aus dem **Wertebereich** W ab.

Beispiel

- $\text{square} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $\text{square}(x) = x^2$
- $\text{add} : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\text{add}(x, y) = x + y$

Funktionen

Definition

Eine (totale) **Funktion** $f : D \rightarrow W$ (mit D, W Mengen) bildet **jeden Wert** aus dem **Definitionsbereich** D auf **genau einen Wert** aus dem **Wertebereich** W ab.

Beispiel

- $square : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $square(x) = x^2$
- $add : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $add(x, y) = x + y$
- $add_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $add_{\mathbb{R}}(x, y) = x + y$

Funktionen: Beispiel

Beispiel

Sei $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_e\}$ und $\Gamma = \{0, 1, \square\}$.

Definiere $\delta : Z \setminus \{z_e\} \times \Gamma \rightarrow Z \times \Gamma \times \{L, R, N\}$ durch

δ	0	1	$\square$
z_0	$(z_0, 0, R)$	$(z_0, 1, R)$	$(z_1, \square, L)$
z_1	$(z_2, 1, L)$	$(z_1, 0, L)$	$(z_e, 1, N)$
z_2	$(z_2, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$	$(z_e, \square, R)$

Dann ist z.B. $\delta(z_0, 1) = (z_0, 1, R)$

Partielle Funktionen

Definition

Eine **partielle Funktion** $f : X \rightarrow_p Y$ bildet jeden Wert aus X auf **höchstens** einen Wert aus Y ab.

Bildet sie einen Wert $x \in X$ auf keinen Wert aus Y ab, so ist f an Stelle x **undefiniert**.

Partielle Funktionen

Definition

Eine **partielle Funktion** $f : X \rightarrow_p Y$ bildet jeden Wert aus X auf **höchstens** einen Wert aus Y ab.

Bildet sie einen Wert $x \in X$ auf keinen Wert aus Y ab, so ist f an Stelle x **undefiniert**.

Beispiel

$f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow_p \mathbb{N}_0$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} x - y & \text{falls } y \leq x \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Eine **Menge** ist **ungeordnet** und enthält **jedes Element höchstens einmal**.
- Ein **Tupel** ist **geordnet** und kann ein Objekt mehrfach als Komponente enthalten.
- Das **kartesische Produkt** $M_1 \times \cdots \times M_n$ ist die Menge aller n -Tupel, bei denen die i -te Komponente jeweils aus M_i ist.
- **Funktion** $f : X \rightarrow Y$ bildet jeden Wert aus X auf genau einen Wert aus Y ab.
- **Partielle Funktion** $g : X \rightarrow_p Y$ kann für manche Werte aus X undefiniert sein.