Theorie der Informatik

1. Mathematische Grundlagen

Malte Helmert Gabriele Röger

Universität Basel

16. Februar 2015

Theorie der Informatik

16. Februar 2015 — 1. Mathematische Grundlagen

1.1 Mengen, Tupel, Relationen

Mengen

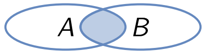
- Menge: ungeordnete Kollektion unterscheidbarer Objekte, wobei jedes Objekt höchstens einmal enthalten ist.
- Spezifikation:
  - Explizit duch Auflistung aller Elemente, z. B. $A = \{1, 2, 3\}$
  - Implizit durch Angabe einer Eigenschaft, die alle Elemente charakterisiert, z. B. $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ and } 1 \leq x \leq 3\}$
  - Implizit durch Sequenzfortführung, z. B. $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $e \in M$: e ist in Menge M (ein Element der Menge)
- $e \notin M$: e ist nicht in Menge M
- Leere Menge $\emptyset = \{\}$
- Mächtigkeit oder Kardinalität $|M|$ einer endlichen Menge M: Anzahl der Elemente in M

Mengen

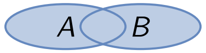
- $A \subseteq B$: A ist eine Teilmenge von B, d. h. jedes Element von A ist Element von B.
- $A \subset B$: A ist eine echte Teilmenge von B, d. h. $A \subseteq B$ und $A \neq B$.
- Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$: Menge aller Teilmengen von M z.B. $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Mengenoperationen

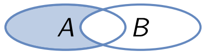
- Schnitt $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$



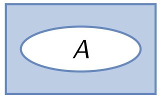
- Vereinigung $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$



- Differenz $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$



- Komplement $\overline{A} = B \setminus A$, wobei $A \subseteq B$ und B Menge aller (in jeweilligem Kontext) betrachteten Elemente



Tupel

- k-Tupel: (geordnete) Sequenz von k Objekten
- Angegeben als $(o_1, \dots, o_k)$ oder $\langle o_1, \dots, o_k \rangle$
- Ein Objekt kann mehrmals in einem Tupel vorkommen.
- Ein Objekt in einem Tupel wird Komponente genannt.
- Terminologie:
  - $k = 2$: (geordnetes) Paar
  - $k = 3$: Tripel
  - $k = 4$: Quadrupel
- Falls k aus Kontext klar ist, oft auch einfach Tupel

Kartesisches Produkt

- Für beliebige Mengen $M_1, M_2, \dots, M_n$ ist das kartesische Produkt $M_1 \times \cdots \times M_n$ die Menge $M_1 \times \cdots \times M_n = \{(o_1, \dots, o_n) \mid o_1 \in M_1, \dots, o_n \in M_n\}$.
- Beispiel: $M_1 = \{a, b, c\}, M_2 = \{1, 2\}$, $M_1 \times M_2 = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$
- Spezialfall: $M^k = M \times \cdots \times M$ (k-mal)
- Beispiel mit $M = \{1, 2\}$: $M^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

Relationen

- Eine n-stellige Relation R über den Mengen $M_1, \dots, M_n$ ist eine Teilmenge ihres kartesischen Produkts: $R \subseteq M_1 \times \dots \times M_n$.
- Beispiel mit $M = \{1, 2\}$: $R_\leq \subseteq M^2$ als $R_\leq = \{(1,1), (1,2), (2,2)\}$

1.2 Funktionen

Funktionen

Definition

Eine (totale) Funktion $f : D \to W$ (mit D, W Mengen) bildet jeden Wert aus dem Definitionsbereich D auf genau einen Wert aus dem Wertebereich W ab.

Beispiel

- $square : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ mit $square(x) = x^2$
- $add : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $add(x, y) = x + y$
- $add_\mathbb{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $add_\mathbb{R}(x, y) = x + y$

Funktionen: Beispiel

Beispiel

Sei $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_e\}$ und $\Gamma = \{0, 1, \square\}$.

Definiere $\delta : Z \setminus \{z_e\} \times \Gamma \to Z \times \Gamma \times \{L, R, N\}$ durch

δ	0	1	$\square$
z_0	$(z_0, 0, R)$	$(z_0, 1, R)$	$(z_1, \square, L)$
z_1	$(z_2, 1, L)$	$(z_1, 0, L)$	$(z_e, 1, N)$
z_2	$(z_2, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$	$(z_e, \square, R)$

Dann ist z.B. $\delta(z_0, 1) = (z_0, 1, R)$

Partielle Funktionen

Definition

Eine partielle Funktion $f : X \to_p Y$ bildet jeden Wert aus X auf höchstens einen Wert aus Y ab.
Bildet sie einen Wert $x \in X$ auf keinen Wert aus Y ab, so ist f an Stelle x undefiniert.

Beispiel

$f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to_p \mathbb{N}_0$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} x - y & \text{falls } y \leq x \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

1.3 Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Eine Menge ist ungeordnet und enthält jedes Element höchstens einmal.
- Ein Tupel ist geordnet und kann ein Objekt mehrfach als Komponente enthalten.
- Das kartesische Produkt $M_1 \times \cdots \times M_n$ ist die Menge aller n-Tupel, bei denen die i-te Komponente jeweils aus M_i ist.
- Funktion $f : X \to Y$ bildet jeden Wert aus X auf genau einen Wert aus Y ab.
- Partielle Funktion $g : X \to_p Y$ kann für manche Werte aus X undefiniert sein.