

Theorie der Informatik

M. Helmert, G. Röger
F. Pommerening
Frühjahrssemester 2015

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 10

Abgabe: Mittwoch, 6. Mai 2015

Anmerkung: Für Abgaben, die ausschliesslich mit L^AT_EX erstellt wurden, gibt es einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie nur die resultierende PDF-Datei bzw. einen Ausdruck davon ab.

Aufgabe 10.1 (μ -Operator; 2 Punkte)

Sei $f : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine Funktion, die durch ein WHILE-Programm P berechnet werden kann, welches nur die Variablen $x_0, \dots, x_4$ verwendet. Geben Sie ein WHILE-Programm an, das μf berechnet. Sie dürfen alle abkürzenden Schreibweisen aus der Vorlesung und früheren Übungen verwenden.

Hinweis: Achten Sie darauf, dass für jede Ausführung von P alle von P verwendeten Variablen den richtigen Initialwert haben, und bedenken Sie, dass P diese Variablen verändern kann.

Aufgabe 10.2 (Aufzählungsfunktionen, 1+1.5 Punkte)

Sei $\Sigma = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$. Geben Sie totale und berechenbare Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \Sigma^*$ an, die die folgenden Sprachen rekursiv aufzählen, und geben Sie jeweils die Funktionswerte $f(0), f(1), \dots, f(5)$ an. Sie dürfen hierbei alle in der Vorlesung besprochenen berechenbaren Funktionen verwenden.

- (a) $L_1 = \{\mathbf{b}^n \mathbf{a}^{2n} \mid n \in \mathbb{N}_0, n \text{ ist gerade}\}$
- (b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \mathbf{a} \text{ kommt in } w \text{ genau einmal vor}\}$

Aufgabe 10.3 (Rekursiv aufzählbare Sprachen, 1+1.5 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Funktionen jeweils an, welche Sprache sie rekursiv aufzählen.

- (a) $f(x) = \text{replace}_{\mathbf{ab}}(\text{bin}(x+1))$
wobei $\text{replace}_{\mathbf{ab}} : \{0,1\}^* \rightarrow \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^*$ alle '0'en durch $\mathbf{a}$ und alle '1'en durch $\mathbf{b}$ ersetzt.

- (b) $f(x) = \begin{cases} f_A(\frac{x}{2}) & \text{falls } x \text{ gerade} \\ f_B(\frac{x-1}{2}) & \text{sonst} \end{cases}$

wobei $f_A(x)$ und $f_B(x)$ totale und berechenbare Funktionen sind, welche die Sprache A respektive die Sprache B rekursiv aufzählen.

Aufgabe 10.4 (Entscheidbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit, 1+1+1 Punkte)

- (a) Beweisen Sie: Wenn $A \subseteq \Sigma^*$ und $B \subseteq \Sigma^*$ semi-entscheidbar sind, dann ist $A \cup B$ auch semi-entscheidbar.
- (b) Beweisen Sie: Wenn $A \subseteq \Sigma^*$ und $B \subseteq \Sigma^*$ entscheidbar sind, dann ist auch $A \cap B$ entscheidbar.
- (c) Behauptung: Folgender Algorithmus ist ein Semi-Entscheidungsverfahren für $A \cup B$ (hierbei seien A und B semi-entscheidbar):

```
INPUT:  $w$ 
IF  $\chi'_A(w) = 1$  THEN
  RETURN 1
ELSE IF  $\chi'_B(w) = 1$  THEN
  RETURN 1
ELSE
  LOOP FOREVER
```

Wieso stimmt diese Behauptung im Allgemeinen nicht?