

# Theorie der Informatik

M. Helmert, G. Röger  
F. Pommerening  
Frühjahrssemester 2015

Universität Basel  
Fachbereich Informatik

## Übungsblatt 9

Abgabe: Mittwoch, 29. April 2015

*Anmerkung:* Für Abgaben, die ausschliesslich mit L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X erstellt wurden, gibt es einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie nur die resultierende PDF-Datei bzw. einen Ausdruck davon ab.

**Aufgabe 9.1** (Modifizierte Subtraktion; 1 Punkt)

Beweisen Sie, dass die folgende Definition der modifizierten Subtraktion korrekt ist, dass also  $sub(x, y) = \max(x - y, 0)$  für alle  $x, y \in \mathbb{N}_0$  gilt. Geben Sie dabei auch Definitionen von  $h$  und  $sub_{rev}$  in üblicher mathematischer Notation an.

$$\begin{aligned}h &= substitute(3, 1, pred, \pi_1^3) \\ sub_{rev} &= primitive\_recursion(\pi_1^1, h) \\ sub &= substitute(2, 2, sub_{rev}, \pi_2^2, \pi_1^2)\end{aligned}$$

**Aufgabe 9.2** (Primitiv rekursive Funktionen; 4 Punkte)

Auf der Vorlesungsseite finden Sie ein Javaprogramm, mit dem Sie primitiv rekursive Funktionen definieren und auswerten können. Definieren Sie mit diesem Programm die folgenden Funktionen ohne den  $\mu$ -Operator zu verwenden (Sie zeigen dadurch, dass es sich um primitiv rekursive Funktionen handelt).

Sie können für Ihre Lösung alle in der Vorlesung definierten Funktionen verwenden. Diese sind in der Datei `lecture.def` enthalten. Fügen Sie ihre Definitionen am Ende dieser Datei unter der entsprechenden Markierung ein. Änderungen oberhalb der Markierung werden bei der Korrektur ignoriert.

Demonstrieren Sie jeweils mit `print` die Korrektheit Ihrer Definition für einige Beispiele.

- (a)  $add\_succ : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$  mit  $add\_succ(x, y) = x + y + 1$  für alle  $x, y \in \mathbb{N}_0$ .
- (b)  $binom_2 : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  mit  $binom_2(x) = \binom{x}{2}$  für alle  $x \in \mathbb{N}_0$

Sie dürfen hierbei ohne Beweis verwenden, dass für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt:  $\sum_{i=1}^n i = \binom{n+1}{2}$

- (c)  $encode : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$  mit  $encode(x, y) = \binom{x+y+1}{2} + x$  für alle  $x, y \in \mathbb{N}_0$ .
- (d)  $pow : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$  mit  $pow(x, y) = x^y$  für alle  $x, y \in \mathbb{N}_0$ .

**Aufgabe 9.3** ( $\mu$ -Operator; 3 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Funktionen  $f$  jeweils eine Definition von  $\mu f$  in üblicher mathematischer Notation an und beweisen Sie, dass es Ihre Definition äquivalent zu  $\mu f$  ist.

- (a)  $f(x, y, z) = z \ominus y^x$  für alle  $x, y, z \in \mathbb{N}_0$
- (b)  $f(x, y, z) = (y \ominus x) \cdot (z \ominus x)$  für alle  $x, y, z \in \mathbb{N}_0$
- (c)  $f(x, y, z) = (y \ominus x) + (z \ominus x)$  für alle  $x, y, z \in \mathbb{N}_0$

**Aufgabe 9.4** ( $\mu$ -rekursive Funktionen; 2 Punkte)

Zeigen Sie mit dem Programm aus Aufgabe 9.2, dass die Funktion  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  mit  $f(x) = \lceil \sqrt[3]{x} \rceil + 1$  für alle  $x \in \mathbb{N}_0$   $\mu$ -rekursiv ist. Sie dürfen dabei alle  $\mu$ -rekursiven Funktionen aus der Vorlesung benutzen. Demonstrieren Sie mit `print` die Korrektheit Ihrer Definition für einige Beispiele.