Theorie der Informatik

M. Helmert, G. Röger
F. Pommerening
Frühjahrssemester 2015

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 3

Abgabe: Mittwoch, 18. März 2015

Anmerkung: Für Abgaben, die ausschliesslich mit LaTeX erstellt wurden, gibt es einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie nur die resultierende PDF-Datei bzw. einen Ausdruck davon ab.

Aufgabe 3.1 (Widerlegungstheorem; 2 Punkte)

Beweisen Sie das Widerlegungstheorem. Zeigen Sie also, dass für beliebige Formelmengen WB und Formeln φ folgendes gilt:

$$\mathrm{WB} \cup \{\varphi\} \text{ ist unerfüllbar gdw. } \mathrm{WB} \models \neg\varphi.$$

Aufgabe 3.2 (Inferenz; 1+1+1+1 Punkte + 1 Bonuspunkt)

Auf der Vorlesungsseite finden Sie ein Javaprogramm zum Überprüfen aussagenlogischer Beweise. Verwenden Sie das Programm, um die folgenden Aussagen zu beweisen. Für eine Aussage der Form WB $\models \varphi$, schreiben Sie dazu eine Ableitung in eine Textdatei, die nur Formeln aus WB als Annahmen verwendet und deren letzte Zeile φ ist. Ein Beispiel dafür finden Sie in der Datei `proof.txt`.
Das Programm überprüft, dass WB $\vdash \varphi$ gilt. Da der im Program verwendete Kalkül korrekt ist, folgt daraus auch WB $\models \varphi$.

(a) $\{A, B\} \models ((A \land B) \lor C)$

(b) $\{(A \land B)\} \models (A \to (B \lor C))$

(c) $\{((A \lor B) \to (A \to C)), A\} \models C$

(d) $\{((C \lor D) \leftrightarrow (A \land B)), \neg E, (((A \land B) \land (C \lor D)) \to E)\} \models \neg(A \land B)$
Ergänzen Sie dazu den Kalkül um eine neue Regel *Negations-Einführung*:

$$\frac{(\varphi \to \psi), (\varphi \to \neg\psi)}{\neg\varphi}$$

(e) *Bonusaufgabe:* Um die Korrektheit des Kalküls zu beweisen muss die Korrektheit aller Regeln gezeigt werden. Zeigen Sie die Korrektheit der Regel *Negations-Einführung.*

Hinweis zur Abgabe: Geben Sie bitte pro Teilaufgabe eine Textdatei ab, welche die Ableitung enthält. Die Datei muss vom Programm lesbar sein und als korrekte Ableitung der Aussage erkannt werden. Die neu eingefügte Regel (*Negations-Einführung*) benötigt eine neue Zeile im Programm. Kopieren Sie diese Zeile auf Ihre reguläre Abgabe. Die Bonusaufgabe kann nicht mit dem Programm gelöst werden.

Aufgabe 3.3 (Resolutionskalkül; 2 Punkte)
Betrachten Sie die Wissensbasis

$$\mathrm{WB} = \{(A \leftrightarrow \neg D), (\neg A \rightarrow (B \vee C)), ((A \rightarrow E) \wedge (B \vee C \vee F)), (E \rightarrow (F \rightarrow (B \vee C))), (C \rightarrow G), (G \rightarrow \neg C)\}.$$

Verwenden sie den Resolutionskalkül, um zu zeigen, dass $\mathrm{WB} \models (B \wedge \neg C)$.
Anmerkung: Ein Resolutionsbeweis besteht aus drei Schritten (siehe Beispiel auf den Vorlesungsfolien). Verwenden Sie insbesondere für die Ableitung im dritten Schritt die Notation aus den Folien, also eine Zeile pro hergeleiteter Klausel zusammen mit einer Begründung der Ableitung.

Aufgabe 3.4 (Prädikatenlogik; 2 Punkte)
Betrachten Sie die folgende prädikatenlogische Formel φ über der Signatur $\langle \{x, y\}, \{\mathrm{c}\}, \{\mathrm{f}, \mathrm{g}\}, \{\mathrm{P}\} \rangle$.

$$\varphi = (\neg \mathrm{P}(\mathrm{c}) \wedge \forall x \exists y \, ((\mathrm{f}(y) = \mathrm{g}(x)) \wedge \mathrm{P}(y)))$$

Geben Sie ein Modell $\mathcal{I} = \left\langle U, \cdot^{\mathcal{I}} \right\rangle$ mit $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$ von φ an und *beweisen* Sie, dass $\mathcal{I} \models \varphi$. Warum ist es nicht notwendig, eine Variablenbelegung α zu spezifieren, um ein Modell von φ anzugeben?