Theorie der Informatik

M. Helmert, G. Röger
F. Pommerening
Frühjahrssemester 2015

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 2

Abgabe: Mittwoch, 11. März 2015

Anmerkung: Für Abgaben, die ausschliesslich mit LaTeX erstellt wurden, gibt es einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie nur die resultierende PDF-Datei bzw. einen Ausdruck davon ab.

Aufgabe 2.1 (Syntax; 0.25+0.25+0.25+0.25 Punkte)
Formalisieren Sie die folgenden Aussagen als aussagenlogische Formeln. Definieren Sie hierzu geeignete atomare Aussagen. Achten Sie darauf alle Formeln vollständig zu klammern.

(a) Wenn es nicht regnet, dann scheint die Sonne.

(b) Wenn Bob schwimmen geht, dann scheint die Sonne und es ist warm.

(c) Bob isst genau dann ein Eis, wenn er schwimmen geht oder wenn es warm ist und es nicht regnet.

(d) Entweder die Sonne scheint oder es regnet (aber nicht beides zusammen).

Anmerkung: Auf der Vorlesungsseite finden Sie ein Javaprogramm, mit dem Sie Ihre Antworten auf syntaktische Korrektheit prüfen können. Auf dem nächsten Übungsblatt wird es eine Programmieraufgabe zu diesem Programm geben, Sie können sich also schon den Quelltext anschauen. Für dieses Blatt ist das Programm aber vollkommen optional.

Aufgabe 2.2 (Semantik; 0.25+0.25+1+1+0.5 Punkte)
Betrachten Sie die Formel

$$\phi = ((A \lor (((\neg B \lor C) \land (C \leftrightarrow \neg D)) \lor (D \rightarrow E))) \rightarrow (F \rightarrow \neg A))$$

(a) Wieviele Zeilen hätte eine Wahrheitstabelle für ϕ?

(b) Die Formel ϕ ist eine Implikation. Geben Sie zuerst eine Wahrheitstafel für das allgemeine Schema einer Implikation $(\varphi \rightarrow \psi)$ an (siehe Foliensatz 03, Folie 27). Achtung: die gefragte Wahrheitstabelle ist **nicht** die Wahrheitstabelle von ϕ.

(c) Geben Sie nun ein Modell $\mathcal{I}$ für ϕ an und beweisen Sie, dass $\mathcal{I} \models \phi$ gilt.

(d) Geben Sie eine Belegung $\mathcal{I}$ an, für die $\mathcal{I} \not\models \phi$ gilt und beweisen Sie diese Aussage.

(e) Welche der Eigenschaften *erfüllbar*, *unerfüllbar*, *gültig*, und *falsifizierbar* hat ϕ? Begründen Sie Ihre Antwort für jede der vier Eigenschaften.

Hinweis: Die Beweise, die Sie in dieser Aufgabe brauchen sind kurz (4 bzw. 6 Schritte). Wenn Sie deutlich mehr Schritte brauchen, überlegen Sie, ob es einen einfacheren Beweis gibt. Die Lösung von Teilaufgabe (b) kann dabei helfen. Was für Anforderungen ergeben sich daraus für $\mathcal{I}$?

Aufgabe 2.3 (Äquivalenzen; 1.5+1.5 Punkte)

(a) Verwenden Sie die Äquivalenzen aus der Vorlesung um die folgende Formel in KNF zu bringen. Wenden Sie in jedem Schritt nur eine Äquivalenz an und geben Sie diese an.

$$\phi = (\neg(A \leftrightarrow \neg B) \rightarrow C)$$

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Formel eine Tautologie ist, indem Sie zeigen, dass $\phi \equiv (A \vee \neg A)$ gilt. Verwenden Sie die Äquivalenzen aus der Vorlesung, wenden Sie in jedem Schritt nur eine Äquivalenz an und geben Sie diese an.

$$\phi = (A \vee (\neg(A \wedge \neg(\neg A \wedge C)) \vee (A \wedge B)))$$

Aufgabe 2.4 (Formelmengen; 1.5+1.5 Punkte)
Betrachten Sie die folgende Formelmenge.

$$\mathrm{WB} = \{(A \vee C), (B \vee \neg C), (C \to \neg B)\}$$

(a) Gibt es ein Modell $\mathcal{I}$ von WB, das auch ein Modell der Formel $\phi = (C \vee \neg A)$ ist? Beweisen Sie Ihre Aussage.

(b) Zeigen Sie, dass alle Modelle $\mathcal{I}$ von WB, auch Modelle der Formel $\phi = (A \vee B)$ sind.