Theorie der Informatik

M. Helmert, G. Röger — Universität Basel
F. Pommerening — Fachbereich Informatik
Frühjahrssemester 2015

Übungsblatt 1

Abgabe: Mittwoch, 4. März 2015

Anmerkung: Für Abgaben, die ausschliesslich mit LaTeX erstellt wurden, gibt es einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie nur die resultierende PDF-Datei bzw. einen Ausdruck davon ab.

Hinweis: In diesem Übungsblatt sollen Sie das korrekte Formulieren von Beweisen üben. Ein formal korrekter Beweis besteht aus einzelnen Schritten, von denen jeder *unmittelbar* aus den Schritten davor oder den Vorraussetzungen hervorgeht (zum Beispiel wenn einen Wert durch seine Definition ersetzt wird). Schreiben Sie bitte die Beweise ausführlich und formal auf. Beispiele dafür finden Sie in den Vorlesungsfolien.

Aufgabe 1.1 (Direkter Beweis; 2 Punkte)
Beweisen Sie folgende Aussage mit einem direkten Beweis. Für beliebige Mengen A und B gilt:

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Hinweis: Bei Aussagen wie dieser wird oft kein Kontext für das Komplement angegeben. Darin steckt die implizite Annahme, dass die Aussage für jeden Kontext gilt. Da Sie für den Beweis einen Wert für den Kontext benötigen, machen Sie diese Annahme explizit, indem Sie am Anfang der Lösung definieren: „Wir betrachten das Komplement im Kontext einer beliebigen Menge C mit $A, B \subseteq C$.“

Aufgabe 1.2 (Beweis durch Widerspruch; 1,5 + 1,5 Punkte)
Beweisen Sie folgende Aussagen mit einem Beweis durch Widerspruch.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: Wenn n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade.

(b) Ein gerichteter *Graph* $G = (V, E)$ ist gegeben durch eine endliche Menge von *Knoten* V und einer Menge von *Kanten* $E \subseteq V^2$.

Ein *Pfad* der Länge n von Knoten u zu Knoten u' in G ist ein Tupel $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ so dass $v_1 = u, v_n = u'$ und für $1 \leq i < n$, $(v_i, v_{i+1}) \in E$.

Zeigen Sie durch Widerspruch: Ist $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ ein kürzester Pfad von v_1 zu v_n in G, so ist für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$ mit $1 \leq i \leq j \leq n$ das Tupel $\langle v_i, \dots, v_j \rangle$ ein kürzester Pfad von v_i nach v_j in G.

Aufgabe 1.3 (Vollständige Induktion; 1 Punkt)
Wir wollen zeigen, dass alle Giraffen gleich hoch sind. In welcher Zeile des folgenden Induktionsbeweises ist ein Fehler? Was ist, formal gesehen, der Fehler?

1. Da wir die genaue Zahl von Giraffen nicht kennen, beweisen wir, dass für jede Menge von Giraffen alle Giraffen in der Menge gleich hoch sind.
2. Wir definieren die Eigenschaft $G(n)$: In einer beliebigen Menge von n Giraffen sind alle Giraffen gleich hoch.
3. Als Induktionsanfang zeigen wir $G(1)$.
4. In einer Menge mit nur einer Giraffe sind offensichtlich alle Giraffen gleich hoch, also gilt $G(1)$.

5. Als Induktionsvoraussetzung dürfen wir annehmen, dass $G(i)$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt.
6. Unter dieser Voraussetzung müssen wir im Induktionsschritt zeigen, dass $G(n+1)$ gilt.
7. Wir betrachten eine Menge von $n+1$ Giraffen $M = \{g_1, \ldots, g_n, g_{n+1}\}$.
8. Wenn wir die erste Giraffe aus der Menge M entfernen, enthält die resultierende Menge n Giraffen: $M_1 = \{g_2, \ldots, g_{n+1}\}, |M_1| = n$.
9. Für M_1 gilt nach Induktionsvoraussetzung $G(n)$ und wir folgern, dass alle Giraffen in M_1 die gleiche Höhe haben.
10. Wenn wir die letzte Giraffe aus der Menge M entfernen, enthält die resultierende Menge n Giraffen: $M_2 = \{g_1, \ldots, g_n\}, |M_2| = n$.
11. Für M_2 gilt nach Induktionsvoraussetzung $G(n)$ und wir folgern, dass alle Giraffen in M_2 die gleiche Höhe haben.
12. Wir betrachten eine Giraffe g_M, die in beiden Mengen ist, zum Beispiel $g_M = g_2$.
13. g_M hat die gleiche Höhe wie alle Giraffen aus M_1 und wie alle Giraffen aus M_2.
14. Daher müssen alle Giraffen aus $M_1 \cup M_2 = M$ die gleiche Höhe haben, d.h. wir haben für M die Aussage $G(n+1)$ gezeigt.
15. Da $G(1)$ gilt und unter der Annahme $G(n)$ auch $G(n+1)$ für $n \geq 1$ gilt, folgern wir, dass $G(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
16. Insbesondere gilt $G(n)$ für die Menge aller Giraffen, d.h. alle Giraffen haben die gleiche Höhe.

Aufgabe 1.4 (Strukturelle Induktion; 2 + 2 Punkte)

(a) Wir definieren zunächst induktiv eine einfache Teilmenge von mathematischen Ausdrücken, die nur die Zeichen „0“, „1“, „·“, „⊕“, „(“ und „)“ verwenden. Die Menge $\mathcal{E}$ der *einfachen Ausdrücke* ist induktiv wie folgt definiert:

- 0 und 1 sind einfache Ausdrücke.
- Wenn x und y einfache Ausdrücke sind, dann ist auch $(x \cdot y)$ ein einfacher Ausdruck.
- Wenn x und y einfache Ausdrücke sind, dann ist auch $(x \oplus y)$ ein einfacher Ausdruck.

Ausserdem definieren wir eine Funktion $f : \mathcal{E} \to \mathbb{N}_0$ als

- $f(0) = 0$, $f(1) = 1$
- $f((x \cdot y)) = f(x) \cdot f(y)$
- $f((x \oplus y)) = (f(x) + f(y)) \mod 2$

Beweisen Sie durch strukturelle Induktion, dass für jeden einfachen Ausdruck $x \in \mathcal{E}$ gilt, dass

$$f(x) \in \{0, 1\}.$$

(b) Wir definieren für die Binärbäume aus der Vorlesung zwei Funktionen $\textit{höhe} : \mathcal{B} \to \mathbb{N}_0$ und $\textit{blätter} : \mathcal{B} \to \mathbb{N}_0$, die jeden Binärbaum $B \in \mathcal{B}$ auf seine Höhe $\textit{höhe}(B)$ bzw. die Anzahl seiner Blätter $\textit{blätter}(B)$ abbilden:

- $\textit{höhe}(\square) = 1$
- $\textit{höhe}((B_L, \bigcirc, B_R)) = \max(\textit{höhe}(B_L), \textit{höhe}(B_R)) + 1$
- $\textit{blätter}(\square) = 1$
- $\textit{blätter}((B_L, \bigcirc, B_R)) = \textit{blätter}(B_L) + \textit{blätter}(B_R)$

Beweisen Sie durch strukturelle Induktion, dass für jeden Binärbaum $B \in \mathcal{B}$ gilt, dass

$$\textit{blätter}(B) \leq 2^{\textit{höhe}(B)-1}.$$