Grundlagen der Künstlichen Intelligenz

30. Aussagenlogik: Logisches Schliessen und Resolution

Malte Helmert

Universität Basel

27. April 2015

Aussagenlogik: Überblick

Kapitelüberblick Aussagenlogik:

- 29. Grundlagen
- 30. Logisches Schliessen und Resolution
- 31. DPLL-Algorithmus
- 32. Lokale Suche und Ausblick

Logisches Schliessen

Logisches Schliessen: Intuition

Logisches Schliessen: Intuition

- Formeln repräsentieren im Allgemeinen nur eine unvollständige Beschreibung der Welt.
- Oftmals möchte man wissen, ob eine Formel aus einer (Menge von) anderen logisch folgt.
- Was bedeutet das?

Logisches Schliessen: Intuition

- Beispiel: $\varphi = (P \vee Q) \wedge (R \vee \neg P) \wedge S$
- S gilt in allen Modellen von φ.
  Wie ist es für P, Q und R?

$\rightsquigarrow$ Betrachte alle Modelle für φ:

P	Q	R	S
F	**T**	**F**	**T**
F	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**T**	**T**
T	**T**	**T**	**T**

Beobachtung

- In allen Modellen für φ gilt auch $Q \vee R$.
- Wir sagen: $Q \vee R$ folgt logisch aus φ.

Logisches Schliessen: Formal

Definition (Logische Folgerung)

Sei Φ eine Formelmenge. Eine Formel ψ folgt logisch aus Φ, in Symbolen $\Phi \models \psi$, wenn alle Modelle von Φ auch Modelle von ψ sind.

Anders gesagt muss für jede Interpretation I gelten:
wenn $I \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$ gilt, dann muss auch $I \models \psi$ gelten.

Frage

Wie können wir automatisch berechnen, ob $\Phi \models \psi$ gilt?

- Eine Möglichkeit: Wahrheitstabelle. (Wie?)
- Geht es auch „besser“, d.h., (potentiell) ohne die komplette Wahrheitstabelle aufbauen zu müssen?

Logisches Schliessen: Deduktionssatz

Satz (Deduktionssatz)

Sei Φ eine endliche Menge von Formeln, ψ eine Formel. Dann gilt:

$$\Phi \models \psi \quad \textit{gdw.} \quad \Big(\bigwedge_{\varphi \in \Phi} \varphi\Big) \to \psi \textit{ ist eine Tautologie}$$

Logisches Schliessen: Deduktionssatz

Satz (Deduktionssatz)

Sei Φ eine endliche Menge von Formeln, ψ eine Formel. Dann gilt:

$$\Phi \models \psi \quad \textit{gdw.} \quad \Big(\bigwedge_{\varphi\in\Phi} \varphi\Big) \rightarrow \psi \textit{ ist eine Tautologie}$$

Beweis.

$\Phi \models \psi$
gdw. für alle Interpr. I: Wenn $I \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$, dann $I \models \psi$
gdw. für alle Interpr. I: Wenn $I \models \bigwedge_{\varphi\in\Phi} \varphi$, dann $I \models \psi$
gdw. für alle Interpr. I: $I \not\models \bigwedge_{\varphi\in\Phi} \varphi$ oder $I \models \psi$
gdw. für alle Interpr. I: $I \models (\bigwedge_{\varphi\in\Phi} \varphi) \rightarrow \psi$
gdw. $(\bigwedge_{\varphi\in\Phi} \varphi) \rightarrow \psi$ ist Tautologie $\square$

Logisches Schliessen

Anwendung des Deduktionssatz

Logisches Schliessen kann auf Testen von Allgemeingültigkeit zurückgeführt werden.

Algorithmus

Frage: Gilt $\Phi \models \psi$?

1. Prüfe, ob $(\bigwedge_{\varphi \in \Phi} \varphi) \rightarrow \psi$ eine Tautologie ist.
2. Wenn ja, dann $\Phi \models \psi$. Ansonsten $\Phi \not\models \psi$.

Im Folgenden: Wie kann Allgemeingültigkeit „effizient“ geprüft werden, d.h. ohne komplette Wahrheitstabellen zu bilden?

Resolution

Klauselmengen

Für den Rest des Kapitels:

- Voraussetzung: Formeln sind in konjunktiver Normalform
- Darstellung von Klauseln als Menge C von Literalen
- Darstellung von Formeln als Menge Δ von Klauseln

Beispiel

Sei $\varphi = (P \vee Q) \wedge \neg P$.

- φ ist in konjunktiver Normalform,
- φ besteht aus den Klauseln $(P \vee Q)$ und $\neg P$.
- Darstellung von φ als Menge von Mengen von Literalen: $\{\{P, Q\}, \{\neg P\}\}$

Unterscheide $\Box$ (leere Klausel) vs. $\emptyset$ (leere Menge von Klauseln).

Resolution: Idee

Beobachtung

- Prüfen auf Allgemeingültigkeit kann auf Prüfen von Unerfüllbarkeit zurückgeführt werden.
- Formel φ allgemeingültig gdw. $\neg\varphi$ unerfüllbar.

Resolution: Idee

- Methode, um Unerfüllbarkeit einer Formel φ zu prüfen.
- Idee: Leite aus φ neue Formeln ab, die aus φ logisch folgen.
- Wenn leere Klausel $\square$ abgeleitet werden kann, dann ist φ unerfüllbar.

Die Resolutionsregel

$$\frac{C_1 \cup \{\ell\}, C_2 \cup \{\bar{\ell}\}}{C_1 \cup C_2}$$

- „Aus $C_1 \cup \{\ell\}$ und $C_2 \cup \{\bar{\ell}\}$ kann man $C_1 \cup C_2$ folgern."
- $C_1 \cup C_2$ ist Resolvent der Elternklauseln $C_1 \cup \{\ell\}$ und $C_2 \cup \{\bar{\ell}\}$.
- Die Literale ℓ und $\bar{\ell}$ heissen Resolutionsliterale, die zugehörige Proposition Resolutionsvariable.
- Der Resolvent folgt logisch aus den Elternklauseln. (Warum?)

Beispiel

- Resolvent von $\{A, B, \neg C\}$ und $\{A, D, C\}$?
- Resolventen von $\{\neg A, B, \neg C\}$ und $\{A, D, C\}$?

Resolution: Ableitungen

Definition (Ableitung)

Notation: $R(\Delta) = \Delta \cup \{C \mid C$ ist Resolvent von 2 Klauseln in $\Delta\}$

Eine Klausel D kann aus Δ abgeleitet werden, in Symbolen $\Delta \vdash D$, wenn es eine Folge von Klauseln $C_1, \ldots, C_n = D$ gibt, so dass für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: $C_i \in R(\Delta \cup \{C_1, \ldots, C_{i-1}\})$

Lemma (Korrektheit der Resolution)

Wenn $\Delta \vdash D$, dann $\Delta \models D$.

Gilt auch die Rückrichtung (Vollständigkeit)?

Resolution: Vollständigkeit?

Rückrichtung des Lemmas gilt nicht im Allgemeinen.

Beispiel:

- $\{\{A, B\}, \{\neg B, C\}\} \models \{A, B, C\}$, aber
- $\{\{A, B\}, \{\neg B, C\}\} \nvdash \{A, B, C\}$

Aber: Rückrichtung gilt für Spezialfall der leeren Klausel $\square$.

Satz (Widerlegungsvollständigkeit der Resolution)

Δ *ist unerfüllbar gdw.* $\Delta \vdash \square$

Folgerung:

- Resolution ist ein vollständiges Beweisverfahren, um Unerfüllbarkeit zu testen.
- Resolution kann für logisches Schliessen eingesetzt werden, indem man auf einen Unerfüllbarkeitstest reduziert.

Resolution: Beispiel

Sei $\Phi = \{P \vee Q, \neg P\}$. Gilt $\Phi \models Q$?

Lösung

- Prüfe hierzu: Ist $((P \vee Q) \wedge \neg P) \rightarrow Q$ Tautologie?
- Äquivalent: Ist $((P \vee Q) \wedge \neg P) \wedge \neg Q$ unerfüllbar?
- Resultierende Klauselmenge Φ': $\{\{P, Q\}, \{\neg P\}, \{\neg Q\}\}$
- Resolution von $\{P, Q\}$ mit $\{\neg P\}$ ergibt $\{Q\}$.
- Resolution von $\{Q\}$ mit $\{\neg Q\}$ ergibt $\square$.
- Beobachtung: Leere Klausel ableitbar, also Φ' unerfüllbar.
- Folgerung: $\Phi \models Q$

Resolution: Diskussion

- Resolution ist eine vollständige Beweismethode, um eine Formel auf Unerfüllbarkeit zu testen.
- Im schlechtesten Fall kann ein Resolutionsbeweis exponentiell lange dauern.
- In der Praxis ist eine Strategie hilfreich, welche Resolutionsschritte als nächstes angewandt werden.
- Im Folgekapitel lernen wir den DPLL-Algorithmus kennen, der als Kombination der Resolution mit Backtracking verstanden werden kann.

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Logisches Schliessen: aus Formel φ folgt die Formel ψ, falls alle Modelle von φ auch Modelle von ψ sind
- Logisches Schliessen kann man mit dem Deduktionssatz auf Test auf Allgemeingültigkeit zurückführen
- Test auf Allgemeingültigkeit kann man auf Test auf Unerfüllbarkeit zurückführen
- Resolution ist eine widerlegungsvollständige Beweismethode für Formeln in konjunktiver Normalform

$\rightsquigarrow$ kann verwendet werden, um zu testen, ob eine Klauselmenge unerfüllbar ist