

Grundlagen der Künstlichen Intelligenz

22. Constraint-Satisfaction-Probleme: Einführung und Beispiele

Malte Helmert

Universität Basel

13. April 2015

Einordnung

Einordnung:

Constraint-Satisfaction-Probleme

Umgebung:

- **statisch** vs. dynamisch
- **deterministisch** vs. nicht-deterministisch vs. stochastisch
- **vollständig** vs. partiell vs. nicht **beobachtbar**
- **diskret** vs. stetig
- **ein Agent** vs. mehrere Agenten

Lösungsansatz:

- problemspezifisch vs. **allgemein** vs. lernend

Constraint-Satisfaction-Probleme: Überblick

Kapitelüberblick Constraint-Satisfaction-Probleme:

- 22.–23. Einführung
 - 22. Einführung und Beispiele
 - 23. Constraint-Netze
- 24.–26. Kernalgorithmen
- 27.–28. Problemstruktur

Einführung

Constraints

Was ist ein Constraint?

constraint = Einschränkung, Nebenbedingung (math.)

Bedingung, die jede Lösung eines Problems erfüllen muss

Verwendung:

- **Mathematik:** Anforderung an die Lösung eines Optimierungsproblems (z. B. Gleichung, Ungleichung)
- **Software-Testing:** Spezifikation von Invarianten für Überprüfung von Datenkonsistenz (z. B. Assertions)
- **Datenbanken:** für Integritätsbedingungen (z.B. foreign key)

Constraint-Satisfaction-Probleme informell

Gegeben:

- eine Menge von **Variablen** mit einem bestimmten Wertebereich
- eine Menge von **Constraints** (Bedingungen),
die diese Variablen erfüllen müssen
 - meist **binär**, d. h. jede Bedingung spricht über **zwei** Variablen

Gesucht:

- eine **Belegung** der Variablen, die alle Constraints erfüllt

Beispiele

Beispiele

Beispiele für Constraint-Satisfaction-Probleme

- 8-Damen-Problem
- lateinische Quadrate
- Sudoku
- Graphfärbung
- Erfüllbarkeit in Aussagenlogik

Komplexere Beispiele:

- Datenbankanfragen
- Gleichungs- und Ungleichungssysteme

Beispiel: 8-Damen-Problem (Wiederholung)

(Wiederholung vom vorigen Kapitel)

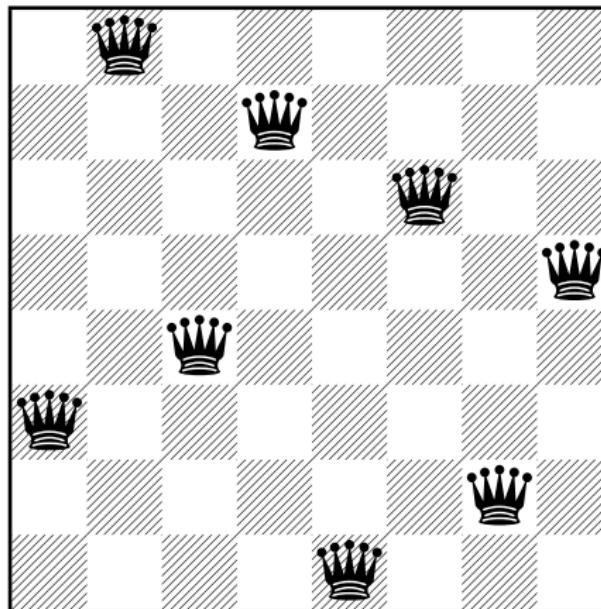
8-Damen-Problem

Wie kann man

- 8 Damen auf einem Schachbrett platzieren,
 - so dass sich keine zwei Damen bedrohen?
-
- ursprünglich 1848 vorgestellt
 - Varianten: Brettgrösse; andere Figuren; mehr Dimensionen

Das Problem hat 12 Lösungen, wenn man symmetrische Lösungen (Rotationen, Spiegelungen) nur einmal zählt

8-Damen-Problem: eine Lösung



eine Lösung des 8-Damen-Problems

Beispiel: lateinische Quadrate

lateinische Quadrate

Wie kann man

- eine $n \times n$ -Matrix mit n Symbolen bilden,
- so dass jedes Symbol genau einmal in jeder Zeile und Spalte auftritt?

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Es gibt 12 verschiedene lateinische Quadrate der Grösse 3,
576 der Grösse 4, 161'280 der Grösse 5, ...,
5'524'751'496'156'892'842'531'225'600 der Grösse 9.

Beispiel: Sudoku

Sudoku

Wie kann man

- eine partiell gefüllte **9×9 -Matrix** mit den Zahlen 1–9 füllen,
- so dass jede **Zeile**, jede **Spalte** und jeder der neun **3×3 -Blöcke** jede Zahl genau einmal enthält?

2	5			3		9		1
	1				4			
4		7				2		8
			5	2				
					9	8	1	
	4					3		
				3	6		7	2
		7						3
9		3				6		4

Beispiel: Sudoku

Sudoku

Wie kann man

- eine partiell gefüllte **9×9 -Matrix** mit den Zahlen 1–9 füllen,
- so dass jede **Zeile**, jede **Spalte** und jeder der neun **3×3 -Blöcke** jede Zahl genau einmal enthält?

2	5	8	7	3	6	9	4	1
6	1	9	8	2	4	3	5	7
4	3	7	9	1	5	2	6	8
3	9	5	2	7	1	4	8	6
7	6	2	4	9	8	1	3	5
8	4	1	6	5	3	7	2	9
1	8	4	3	6	9	5	7	2
5	7	6	1	4	2	8	9	3
9	2	3	5	8	7	6	1	4

Beispiel: Sudoku

Sudoku

Wie kann man

- eine partiell gefüllte **9×9 -Matrix** mit den Zahlen 1–9 füllen,
- so dass jede **Zeile**, jede **Spalte** und jeder der neun **3×3 -Blöcke** jede Zahl genau einmal enthält?

2	5	8	7	3	6	9	4	1
6	1	9	8	2	4	3	5	7
4	3	7	9	1	5	2	6	8
3	9	5	2	7	1	4	8	6
7	6	2	4	9	8	1	3	5
8	4	1	6	5	3	7	2	9
1	8	4	3	6	9	5	7	2
5	7	6	1	4	2	8	9	3
9	2	3	5	8	7	6	1	4

Zusammenhang lateinische Quadrate?

Sudoku: Trivia

- wohlgeformte Sudokus haben **genau eine** Lösung
- dafür müssen im Minimalfall 17 Felder vorausgefüllt werden (McGuire et al., 2012)
- 6'670'903'752'021'072'936'960 gelöste Konfigurationen
- nur 5'472'730'538 unter Ausnutzung von Symmetrie

Beispiel: Graphfärbung

Graphfärbung

Wie kann man

- die **Knoten eines gegebenen Graphen** mit k Farben
- so **einfärben**, dass zwei benachbarte Knoten nie dieselbe Farbe haben?

(Der Graph und k sind Parameter des Problems.)

Beispiel: Graphfärbung

Graphfärbung

Wie kann man

- die **Knoten eines gegebenen Graphen** mit k Farben
- so **einfärben**, dass zwei benachbarte Knoten nie dieselbe Farbe haben?

(Der Graph und k sind Parameter des Problems.)

NP-vollständiges Problem

- selbst für den Spezialfall planarer Graphen und $k = 3$
- einfach für $k = 2$ (auch für allgemeine Graphen)

Beispiel: Graphfärbung

Graphfärbung

Wie kann man

- die **Knoten eines gegebenen Graphen** mit k Farben
- so **einfärben**, dass zwei benachbarte Knoten nie dieselbe Farbe haben?

(Der Graph und k sind Parameter des Problems.)

NP-vollständiges Problem

- selbst für den Spezialfall planarer Graphen und $k = 3$
- einfach für $k = 2$ (auch für allgemeine Graphen)

Zusammenhang Sudoku?

Vier-Farben-Problem

berühmtes mathematisches Problem: **Vier-Farben-Problem**

- kann man **planare** Graphen immer mit 4 Farben einfärben?
- Vermutung aufgestellt von Francis Guthrie (1852)
- 1890 erster Beweis, dass 5 Farben ausreichen
- mehrmals falsche Beweise, die über 10 Jahre Bestand hatten

Vier-Farben-Problem

berühmtes mathematisches Problem: **Vier-Farben-Problem**

- kann man **planare** Graphen immer mit 4 Farben einfärben?
- Vermutung aufgestellt von Francis Guthrie (1852)
- 1890 erster Beweis, dass 5 Farben ausreichen
- mehrmals falsche Beweise, die über 10 Jahre Bestand hatten
- gelöst 1976 durch Appel und Haken: 4 Farben reichen
- Appel und Haken reduzierten Problem auf 1936 Fälle, die durch Computer überprüft wurden
- erstes grosses offenes Problem in der Mathematik, das per Computer gelöst wurde
~~ führte zu Kontroverse: Ist das ein Beweis?

Erfüllbarkeit in Aussagenlogik

Erfüllbarkeit in Aussagenlogik

Wie kann man

- eine gegebene Menge von **Aussagevariablen** so mit **wahr/falsch** belegen,
- dass eine gegebene Menge von **Klauseln** (Formeln der Art $X \vee \neg Y \vee Z$) erfüllt (wahr) wird?

Erfüllbarkeit in Aussagenlogik

Erfüllbarkeit in Aussagenlogik

Wie kann man

- eine gegebene Menge von **Aussagevariablen** so mit **wahr/falsch** belegen,
- dass eine gegebene Menge von **Klauseln** (Formeln der Art $X \vee \neg Y \vee Z$) erfüllt (wahr) wird?

Anmerkungen:

- NP-vollständig (Cook 1971; Levin 1973)
- Klauselform (statt beliebiger Logikformeln) ist keine echte Einschränkung
- Beschränkung auf Klauseln der Länge 3 wäre ebenfalls keine echte Einschränkung

Erfüllbarkeit in Aussagenlogik

Erfüllbarkeit in Aussagenlogik

Wie kann man

- eine gegebene Menge von **Aussagevariablen** so mit **wahr/falsch** belegen,
- dass eine gegebene Menge von **Klauseln** (Formeln der Art $X \vee \neg Y \vee Z$) erfüllt (wahr) wird?

Anmerkungen:

- NP-vollständig (Cook 1971; Levin 1973)
- Klauselform (statt beliebiger Logikformeln) ist keine echte Einschränkung
- Beschränkung auf Klauseln der Länge 3 wäre ebenfalls keine echte Einschränkung

Zusammenhang zu vorigen Problemen (z.B. Sudoku)?

Praktische Anwendungen

- Es gibt **Tausende** praktischer Anwendungen von Constraint-Satisfaction-Problemen.
- Dies gilt allein schon für das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik.

Einige Beispiele:

- Verifikation digitaler Schaltkreise
- Timetabling (Erstellen von Zeit- und Belegungsplänen)
- Planung von Wasser- und Elektrizitätsleitungen, Straßen und ähnlicher Infrastruktur
- Zuweisung von Frequenzspektren (Rundfunk, Mobilfunk)
- Konfiguration von elektronischen Geräten (z. B. Drucker)

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- **Constraint Satisfaction:**
 - finde **Belegung** einer Menge von **Variablen**
 - mit bestimmten **Wertebereichen**,
 - die einer Menge von **Constraints** (Bedingungen) genügt.
- **Beispiele:**
 - 8-Damen-Problem
 - lateinische Quadrate
 - Sudoku
 - Graphfärbung
 - Erfüllbarkeit in Aussagenlogik
 - Tausende praktische Anwendungen