Theorie der Informatik

18. Komplexitätstheorie: Motivation und Einführung

Malte Helmert   Gabriele Röger

Universität Basel

7. Mai 2014

Überblick: Vorlesung

Vorlesungsteile

I. Logik ✓

II. Automatentheorie und formale Sprachen ✓

III. Berechenbarkeitstheorie ✓

IV. Komplexitätstheorie

Überblick: Komplexitätstheorie

IV. Komplexitätstheorie

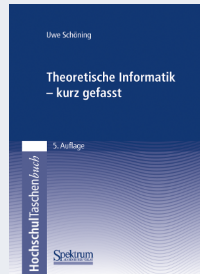
18. Motivation und Einführung
19. P, NP und polynomielle Reduktionen
20. Satz von Cook und Levin
21. einige NP-vollständige Probleme

Nachlesen

Literatur zu diesem Vorlesungskapitel

Theoretische Informatik - kurz gefasst
von Uwe Schöning (5. Auflage)

- Kapitel 3.1



Motivation

Ein Szenario (1)

Beispielszenario

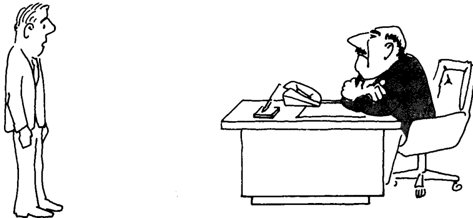
- Sie sind Programmierer(-in) bei einer Logistikfirma.
- Ihr Chef beauftragt Sie, ein Programm zu entwickeln, das die Route eines Lieferwagens Ihrer Firma optimiert:
  - Das Fahrzeug beginnt die Route am Lager Ihrer Firma.
  - Es muss auf seiner Route 50 Stationen anfahren.
  - Sie kennen die Entfernungen zwischen allen relevanten Orten (Stationen und Lager).
  - Ihr Programm soll eine Route vom Lager über alle Stationen zurück zum Lager berechnen, die so kurz wie möglich ist.

Ein Szenario (2)

Beispielszenario (Fortsetzung)

- Sie arbeiten wochenlang an dem Problem,
  schaffen es aber nicht, ein solches Programm zu entwickeln.
  Alle ihre Versuche
  - berechnen Routen, die möglicherweise suboptimal sind, oder
  - terminieren nicht in vernünftiger Zeit
    (sagen wir: innerhalb eines Monats)
- Was sagen Sie Ihrem Chef?

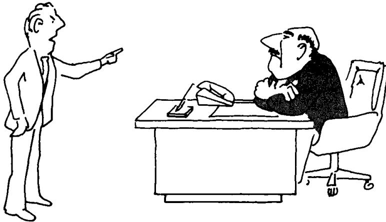
Was Sie nicht sagen wollen



„Ich kann keinen effizienten Algorithmus finden, weil ich zu dumm dafür bin.“

Quelle: M. Garey & D. Johnson, Computers and Intractability, Freeman 1979, S. 2

Was Sie am liebsten sagen würden



„Ich kann keinen effizienten Algorithmus finden,
weil es so einen Algorithmus nicht gibt!“

Quelle: M. Garey & D. Johnson, Computers and Intractability, Freeman 1979, S. 2

Was Komplexitätstheorie Ihnen zu sagen erlaubt

„Ich kann keinen effizienten Algorithmus finden,
aber all diese berühmten Informatiker können das auch nicht.“

Quelle: M. Garey & D. Johnson, Computers and Intractability, Freeman 1979, S. 3

Warum Komplexitätstheorie?

Komplexitätstheorie

Komplexitätstheorie sagt uns, welche Probleme schnell gelöst werden können („einfache Problem“) und welche nicht („schwere Probleme“).

- Das ist praktisch nützlich, weil einfache und schwere Probleme unterschiedliche Techniken zur Lösung erfordern.
- Wenn wir zeigen können, dass ein Problem schwer ist, brauchen wir nicht unsere Zeit mit der (vergeblichen) Suche nach „einfachen“ Algorithmen zu verschwenden.

Warum Reduktionen?

Reduktionen

Ein wichtiger Teil der Komplexitätstheorie sind (polynomielle) Reduktionen, die zeigen, wie ein neues Problem P auf ein bekanntes Problem Q zurückgeführt werden kann.

- nützlich für theoretische Analyse von P, weil es uns erlaubt, unser Wissen über Q auf P zu übertragen
- oft auch nützlich für praktische Algorithmen für P: führe P auf Q zurück und verwende dann den besten bekannten Algorithmus für Q

Testen Sie Ihre Intuition! (1)

- Die folgende Folie benennt einige Graphenprobleme.
- Die Eingabe ist immer ein gerichteter Graph $G = \langle V, E \rangle$.
- Wie schwierig sind die Probleme Ihrer Einschätzung nach?
- Sortieren Sie die Probleme von
  am einfachsten (= benötigt die geringste Zeit zur Lösung)
  zu am schwierigsten (benötigt die meiste Zeit zur Lösung)
- keine Begründungen nötig, folgen Sie nur Ihrer Intuition!
- anonym und unbewertet

Testen Sie Ihre Intuition! (2)

1. Finden Sie einen einfachen Pfad (= ohne Zyklus) von $u \in V$ zu $v \in V$ mit minimaler Länge.
2. Finden Sie einen einfachen Pfad (= ohne Zyklus) von $u \in V$ zu $v \in V$ mit maximaler Länge.
3. Bestimmen Sie, ob G stark zusammenhängend ist (jeder Knoten ist von jedem erreichbar).
4. Finden Sie einen Zyklus (nichtleerer Pfad von u nach u für irgendein $u \in V$; mehrfache Besuche von Knoten erlaubt).
5. Finden Sie einen Zyklus, der alle Knoten besucht.
6. Finden Sie einen Zyklus, der einen gegeben Knoten u besucht.
7. Finden Sie einen Pfad, der alle Knoten besucht, ohne einen Knoten zu wiederholen.
8. Finden Sie einen Pfad, der alle Kanten benutzt, ohne eine Kante zu wiederholen.

Wie misst man Laufzeit?

Wie misst man Laufzeit?

- Zeitkomplexität ist ein Mass, das uns sagt, wie viel Zeit die Lösung eines Problems benötigt.
- Wie können wir so ein Mass angemessen definieren?

Wie misst man Laufzeit?

- Zeitkomplexität ist ein Mass, das uns sagt, wie viel Zeit die Lösung eines Problems benötigt.
- Wie können wir so ein Mass angemessen definieren?

Beispielhafte Aussagen über Laufzeit:

- „Der Aufruf `sort /usr/share/dict/words` auf dem Computer `kibo` benötigt 0.105 Sekunden.“
- „Bei einer Eingabedatei der Grösse 1 MB benötigt `sort` auf einem modernen Computer höchstens 1 Sekunde.“
- „Quicksort ist schneller als Sortieren durch Einfügen.“
- „Sortieren durch Einfügen ist langsam.“

$\rightsquigarrow$ sehr unterschiedliche Aussagen mit verschiedenen Vor- und Nachteilen.

Präzise Aussagen vs. allgemeine Aussagen

Beispielaussage über Laufzeit

„Der Aufruf `sort /usr/share/dict/words`
auf dem Computer `kibo` benötigt 0.105 Sekunden.“

Vorteil: sehr präzise

Nachteil: nicht allgemein

- eingabespezifisch:
  Was ist, wenn wir andere Dateien sortieren wollen?
- maschinenspezifisch:
  Was passiert auf einem anderen Computer?
- sogar situationsspezifisch:
  Erhalten wir morgen dasselbe Ergebnis wie heute?

Allgemeine Aussagen über Laufzeit

In dieser Vorlesung wollen wir allgemeine Aussagen über Laufzeit treffen. Dies erreichen wir auf drei Weisen:

Allgemeine Aussagen über Laufzeit

In dieser Vorlesung wollen wir allgemeine Aussagen über Laufzeit treffen. Dies erreichen wir auf drei Weisen:

1. Allgemeine Eingaben

Statt konkreter Eingaben sprechen wir über allgemeine Arten von Eingaben:

- Beispiel: Laufzeit zum Sortieren einer Eingabe der Grösse n im schlechtesten Fall
- Beispiel: Laufzeit zum Sortieren einer Eingabe der Grösse n im durchschnittlichen Fall

hier: Laufzeit für Eingabegrösse n im schlechtesten Fall

Allgemeine Aussagen über Laufzeit

In dieser Vorlesung wollen wir allgemeine Aussagen über Laufzeit treffen. Dies erreichen wir auf drei Weisen:

2. Ignorieren von Details

Statt exakter Formeln für die Laufzeit geben wir die Grössenordnung an:

- Beispiel: statt zu sagen, dass wir Zeit $\lceil 1.2n \log n \rceil - 4n + 100$ benötigen, sagen wir, dass wir Zeit $O(n \log n)$ benötigen.
- Beispiel: statt zu sagen, dass wir Zeit $O(n \log n)$, $O(n^2)$ oder $O(n^4)$ benötigen, sagen wir, dass wir polynomiell viel Zeit benötigen.

hier: Was kann in polynomieller Zeit berechnet werden?

Allgemeine Aussagen über Laufzeit

In dieser Vorlesung wollen wir allgemeine Aussagen über Laufzeit treffen. Dies erreichen wir auf drei Weisen:

3. Abstrakte Kostenmasse

Statt der Laufzeit auf einem konkreten Computer betrachten wir abstraktere Kostenmasse:

- Beispiel: zähle die ausgeführten Maschinencode-Anweisungen
- Beispiel: zähle die ausgeführten Java-Bytecode-Anweisungen
- Beispiel: zähle bei Sortieralgorithmen die Elementvergleiche

hier: zähle Berechnungsschritte einer Turingmaschine (polynomiell äquivalent zu anderen Massen)

Entscheidungsprobleme

Entscheidungsprobleme

- Wie zuvor vereinfachen wir unsere Untersuchung, indem wir uns auf Entscheidungsprobleme beschränken.
- Komplexere Berechnungsprobleme können auf geeignet definierte Entscheidungsprobleme zurückgeführt werden.
- Formal sind Entscheidungsprobleme (wie zuvor) als Sprachen definiert, aber wir verwenden ab jetzt wo möglich eine informelle „Gegeben“-„Gefragt“-Notation.

Beispiel: Entscheidungs- vs. Berechnungsproblem (1)

Definition (Hamiltonkreis)

Sei $G = \langle V, E \rangle$ ein (gerichteter oder ungerichteter) Graph.

Ein Hamiltonkreis in G ist eine Folge von Knoten $\pi = v_0, \ldots, v_n \in V$ mit folgenden Eigenschaften:

- π ist ein Pfad: für alle $0 \leq i < n$ führt eine Kante von v_i nach v_{i+1}
- π ist ein Kreis: $v_0 = v_n$
- π ist einfach: $v_i \neq v_j$ für alle $i \neq j$ mit $i, j < n$
- π ist hamiltonsch: alle Knoten von V sind in π enthalten

Beispiel: Entscheidungs- vs. Berechnungsproblem (2)

Beispiel (Hamiltonkreise in gerichteten Graphen)

$\mathcal{P}$: Berechnungsproblem DirHamiltonCycleGen

- Eingabe: gerichteter Graph $G = \langle V, E \rangle$
- Ausgabe: ein Hamiltonkreis in G
  bzw. Meldung, dass keiner existiert

$\mathcal{E}$: Entscheidungsproblem DirHamiltonCycle

- Gegeben: gerichteter Graph $G = \langle V, E \rangle$
- Frage: Enthält G einen Hamiltonkreis?

Diese Probleme sind polynomiell äquivalent:
aus einem polynomiellen Algorithmus für das eine Problem
kann man einen polynomiellen Algorithmus für das jeweils andere
Problem konstruieren. (Ohne Beweis.)

Algorithmen für Entscheidungsprobleme

Algorithmen für Entscheidungsprobleme:

- Wo möglich, geben wir Algorithmen für Entscheidungsprobleme in Pseudo-Code an (analog zu WHILE-Programmen).
- Da es nur um Ja-/Nein-Fragen geht, müssen wir keinen Ergebniswert berechnen.
- Stattdessen verwenden wir Anweisungen **ACCEPT**, um die gegebene Eingabe zu akzeptieren („Ja"-Antwort) und **REJECT**, um sie abzulehnen („Nein"-Antwort).
- Wo wir formaler sein müssen, verwenden wir Turingmaschinen und den Akzeptanzbegriff aus Kapitel 11.

Nichtdeterminismus

Nichtdeterminismus

- Um die Komplexitätstheorie zu entwickeln, benötigen wir das algorithmische Konzept des Nichtdeterminismus.
- Schon bekannt für Turingmaschinen ($\rightsquigarrow$ Kapitel 11):
  - Eine NTM kann mehrere mögliche Nachfolgekonfigurationen für eine gegebene Konfiguration haben.
  - Eingabe x wird akzeptiert, wenn es mindestens einen möglichen Berechnungsweg gibt, der in einen Endzustand führt.
- Hier führen wir analog dazu Nichtdeterminismus für Pseudo-Code (bzw. WHILE-Programmen) ein.

Nichtdeterministische Algorithmen

Nichtdeterministische Algorithmen:

- Alle Bestandteile deterministischer Algorithmen sind auch in nichtdeterministischen Algorithmen erlaubt: **IF**, **WHILE**, etc.
- Zusätzlich gibt es eine nichtdeterministische Zuweisung:

  $$\textbf{GUESS } x_i \in \{0, 1\}$$

  Hierbei ist x_i eine Programmvariable.

Nichtdeterministische Algorithmen: Akzeptanz

- Bedeutung von **GUESS** $x_i \in \{0, 1\}$:
  x_i wird entweder der Wert 0 oder der Wert 1 zugewiesen.
- Damit ist nicht mehr eindeutig festgelegt,
  wie sich das Programm für eine gegebene Eingabe verhält:
  es gibt mehrere Möglichkeiten, was passieren kann.
- Das Programm akzeptiert eine gegebene Eingabe,
  wenn mindestens ein möglicher Ausführungspfad existiert,
  der zu einer **ACCEPT**-Anweisung führt.
- Ansonsten wird die Eingabe abgelehnt.

Anmerkung: Asymmetrie zwischen Akzeptieren und Ablehnen!
(vgl. Semi-Entscheidbarkeit)

Komplexere GUESS-Anweisungen

- Wir verwenden im Folgenden im Pseudo-Code auch Anweisungen wie

  $$\textbf{GUESS } x \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1\}$$

  oder

  $$\textbf{GUESS } x \in S$$

  für eine Menge S.
- Solche Anweisungen sind Kurzschreibweisen und lassen sich in k bzw. $\lceil \log_2 |S| \rceil$ „atomare“ **GUESS**-Anweisungen zerlegen.

Beispiel: nichtdeterministischer Algorithmus (1)

Beispiel (DirHamiltonCycle)

Eingabe: gerichteter Graph $G = \langle V, E \rangle$

start := ein beliebiger Knoten aus V
$\mathit{current} := \mathit{start}$
$\mathit{remaining} := V \setminus \{\mathit{start}\}$
WHILE $\mathit{remaining} \neq \emptyset$:
  GUESS $\mathit{next} \in \mathit{remaining}$
  IF $\langle \mathit{current}, \mathit{next} \rangle \notin E$:
    REJECT
  $\mathit{remaining} := \mathit{remaining} \setminus \{\mathit{next}\}$
  $\mathit{current} := \mathit{next}$
IF $\langle \mathit{current}, \mathit{start} \rangle \in E$:
  ACCEPT

Beispiel: nichtdeterministischer Algorithmus (2)

- bei geeigneten Datenstrukturen löst der Algorithmus das Problem in $O(n \log n)$ Programmschritten
- Wie viele Schritte würde ein deterministischer Algorithmus benötigen?

Raten und Prüfen

- Das DirHamiltonCycle-Beispiel illustriert ein allgemeines Design-Prinzip für nichtdeterministische Algorithmen:

  Raten und Prüfen („guess and check“)

- Im Allgemeinen können nichtdeterministische Algorithmen ein Problem lösen, indem sie zuerst eine „Lösung“ raten und dann überprüfen, dass diese tatsächlich eine Lösung ist.
- Wenn Lösungen zu einem Problem effizient überprüfbar sind, dann kann das Problem auch effizient gelöst werden, sofern Nichtdeterminismus verwendet werden darf.

Die Macht des Nichtdeterminismus

- Nichtdeterministische Algorithmen sind sehr mächtig,
  da sie den „richtigen“ Berechnungsschritt „raten“ können.
- Oder anders interpretiert: sie durchlaufen
  viele mögliche Berechnungen „parallel“,
  und es reicht, wenn eine davon erfolgreich ist.
- Können sie Probleme effizient (in polynomieller Zeit) lösen,
  die deterministische Algorithmen nicht effizient lösen können?
- Das ist die grosse Frage!

Zusammenfassung

Zusammenfassung (1)

- Komplexitätstheorie befasst sich (unter anderem) damit, welche Probleme schnell gelöst werden können und welche nicht.
- hier: Fokus auf der Frage, was in polynomieller Zeit berechnet werden kann
- Wir verwenden zur Formalisierung Turingmaschinen, aber andere Berechnungsformalismen sind polynomiell äquivalent.
- Wir betrachten Entscheidungsprobleme, aber die Ergebnisse sind direkt auf allgemeine Berechnungsprobleme übertragbar.

Zusammenfassung (2)

wichtiges Konzept: Nichtdeterminismus:

- Nichtdeterministische Algorithmen können „raten“, d.h. mehrere Berechnungen „gleichzeitig“ durchführen.
- Eine Eingabe erhält eine „Ja“-Antwort, wenn mindestens ein möglicher Berechnungsweg existiert, der zur Akzeptanz führt.
- in NTMs: durch nichtdeterministische Übergänge ($\delta(z, a)$ enthält mehrere Elemente)
- in Pseudo-Code: durch **GUESS**-Anweisungen