Theorie der Informatik

11. Kontextsensitive und Typ-0-Sprachen

Malte Helmert Gabriele Röger

Universität Basel

7. April 2014

11.1 Kontextsensitive und allgemeine Grammatiken

Wiederholung: (kontextsensitive) Grammatiken

Definition (Grammatik)

Eine Grammatik ist ein 4-Tupel (Σ, V, P, S) mit

- Σ endliches Terminalalphabet,
- V endliche Menge von Variablen (mit $V \cap \Sigma = \emptyset$),
- $P \subseteq (V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^*$ endliche Menge von Regeln, und
- $S \in V$ Startvariable.

Typ 0 und Typ 1

- Jede Grammatik ist eine Typ-0-Grammatik.
- Bei kontextsensitiven (Typ-1) Grammatiken gilt für alle Regeln $w_1 \to w_2$, dass $|w_1| \leq |w_2|$.
  Einzige Ausnahme: Regel $S \to \varepsilon$ ist für Startsymbol S erlaubt, falls S auf keiner rechten Regelseite vorkommt.

11.2 Turingmaschinen

Automatenmodell für Typ-1- und Typ-0-Sprachen?

Endliche Automaten akzeptieren genau die regulären Sprachen, Kellerautomaten genau die kontextfreien Sprachen. Gibt es auch ein Automatenmodell für kontextsensitive und Typ-0-Sprachen?

Ja! (Linear beschränkte) Turingmaschinen.

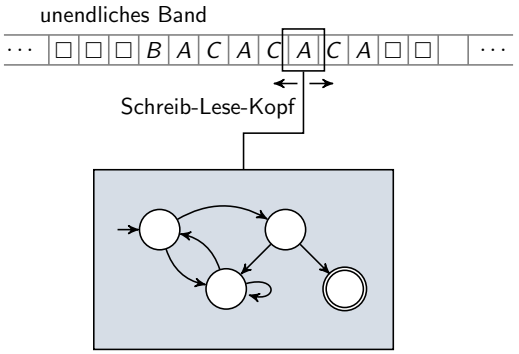
Foto mit freundlicher Genehmigung von imagerymajestic / FreeDigitalPhotos.net

Alan Turing (1912-1954)

Foto mit freundlicher Genehmigung von Jon Callas / wikimedia commons

- Britischer Logiker, Mathematiker, Kryptoanalytiker und Informatiker
- Wichtigste Arbeit (für uns): On Computable Numbers, with an Application to the „Entscheidungsproblem“ → Turingmaschine
- Mitarbeit an Enigma-Entschlüsselung
- Wegen Homosexualität zu Gefängnisstrafe verurteilt, wurde aber im Dezember 2013 von Elizabeth II begnadigt
- Turing-Award wichtigster Wissenschaftspreis in der Informatik

Turingmaschine: konzeptuell



Nichtdeterministische Turingmaschine: Definition

Definition (Nichtdeterministische Turingmaschine)

Eine (nichtdeterministische) Turingmaschine (NTM) ist gegeben durch ein 7-Tupel $M = \langle Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E \rangle$ mit:

- Z endliche, nicht-leere Menge von Zuständen
- $\Sigma \neq \emptyset$ endliches Eingabealphabet
- $\Gamma \supset \Sigma$ endliches Bandalphabet
- $\delta : (Z \setminus E) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Z \times \Gamma \times \{\mathrm{L}, \mathrm{R}, \mathrm{N}\})$ Übergangsfunktion
- $z_0 \in Z$ Startzustand
- $\square \in \Gamma \setminus \Sigma$ Blank-Zeichen
- $E \subseteq Z$ Endzustände

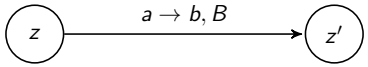
Turingmaschine: Übergangsfunktion

Sei $M = \langle Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E \rangle$ nichtdeterministische Turingmaschine.

Was bedeutet Übergangsfunktion δ intuitiv?

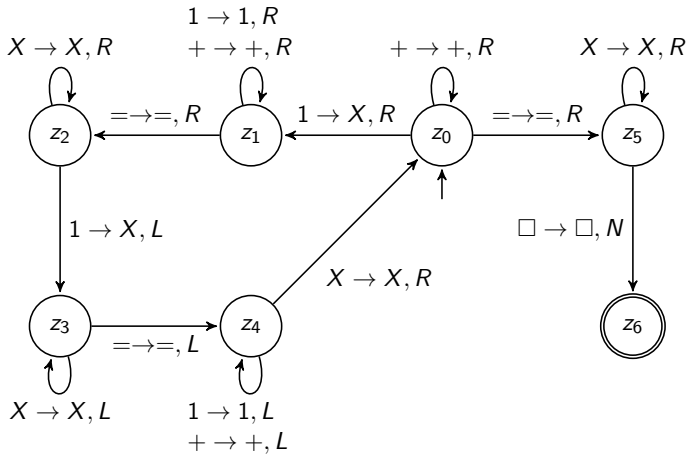
$(z', b, B) \in \delta(z, a)$: Wenn M im Zustand z das Zeichen a liest, dann kann M im nächsten Schritt in Zustand z' übergehen, a durch b ersetzen, und den Schreib-Lesekopf in Richtung $B \in \{L, N, R\}$ bewegen. Dabei bedeutet

- L einen Schritt nach links,
- N die neutrale Bewegung (also Stehenbleiben), und
- R einen Schritt nach rechts.



Nichtdeterministische Turingmaschine: Beispiel

$M = (\{z_0, z_1, \ldots, z_6\}, \{1, +, =\}, \{1, +, =, X, \square\}, \delta, z_0, \square, \{z_6\})$



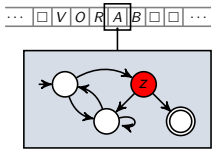
Turingmaschine: Konfiguration

Definition (Konfiguration einer Turingmaschine)

Eine Konfiguration einer Turingmaschine $M = \langle Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E \rangle$ ist gegeben durch ein Wort $k \in \Gamma^* Z \Gamma^+$.

Konfiguration $w_1 z w_2$ bedeutet, dass der nicht-leere bzw. bereits besuchte Teil des Bandes das Wort $w_1 w_2$ enthält, der Schreib-Lesekopf auf dem ersten Zeichen von w_2 steht und die TM sich in Zustand z befindet.

Beispiel



Konfiguration $\square VORzAB\square\square$.

Turingmaschine: Berechnungsschritt

Definition (Berechnungsschritt einer Turingmaschine)

Eine NTM $M = \langle Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E \rangle$ kann nach den folgenden Regeln in einem Berechnungsschritt von Konfiguration k in Konfiguration k' übergehen ($k \vdash_M k'$):

$a_1 \dots a_m z b_1 \dots b_n \vdash_M$

$$\begin{cases} a_1 \dots a_m z' c b_2 \dots b_n, \text{falls } (z', c, N) \in \delta(z, b_1), m \geq 0, n \geq 1 \\ a_1 \dots a_m c z' b_2 \dots b_n, \text{falls } (z', c, R) \in \delta(z, b_1), m \geq 0, n \geq 2 \\ a_1 \dots a_{m-1} z' a_m c b_2 \dots b_n, \text{falls } (z', c, L) \in \delta(z, b_1), m \geq 1, n \geq 1 \\ a_1 \dots a_m c z' \square, \text{falls } (z', c, R) \in \delta(z, b_1), m \geq 0, n = 1 \\ z' \square c b_2 \dots b_n, \text{falls } (z', c, L) \in \delta(z, b_1), m = 0, n \geq 1 \end{cases}$$

Turingmaschine: Erreichbarkeit von Konfigurationen

Definition (Erreichbare Konfiguration)

Konfiguration k' ist mit NTM M von Konfiguration k aus erreichbar ($k \vdash_M^* k'$), falls $k = k'$ oder es gibt Konfigurationen $k_0, \dots, k_n$ ($n \geq 1$), so dass

- $k_0 = k$,
- $k_i \vdash_M k_{i+1}$ für $i \in \{0, \dots, n-1\}$, und
- $k_n = k'$.

Turingmaschine: Erkanntes Wort

Definition (erkanntes Wort bei Turingmaschinen)

NTM $M = \langle Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E \rangle$ erkennt das Wort w genau dann, wenn M von der Startkonfiguration $z_0 w$ mit endlich vielen Berechnungsschritten in eine Konfiguration mit einem Endzustand übergehen kann:

M erkennt w gdw. $z_0 w \vdash_M^* w_1 z w_2$ mit $z \in E, w_1 \in \Gamma^*, w_2 \in \Gamma^+$.

Spezialfall: Für $w = \varepsilon$ ist die Startkonfiguration $z_0 \square$.

Beispiel: Tafel

Turingmaschine: Akzeptierte Sprache

Definition (akzeptierte Sprache einer NTM)

Sei M eine nichtdeterministische Turingmaschine mit Eingabealphabet Σ. Die von M akzeptierte Sprache ist definiert durch

$$\mathcal{L}(M) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ wird von } M \text{ erkannt}\}.$$

Beispiel: Tafel

Linear beschränkte Turingmaschinen

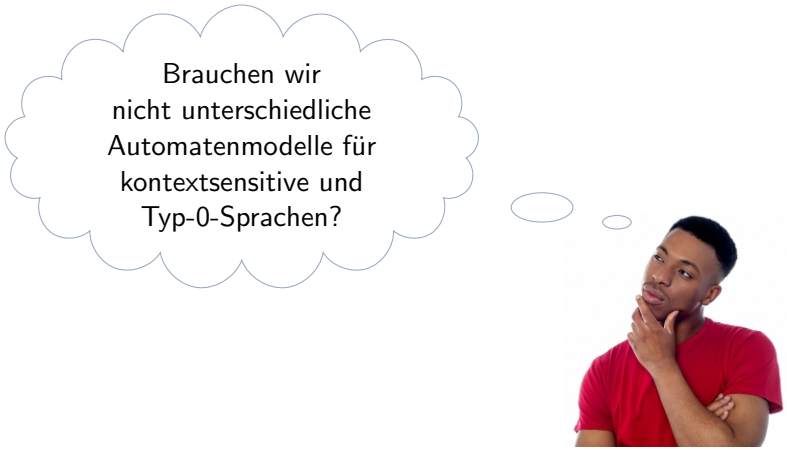


Foto mit freundlicher Genehmigung von stockimages / FreeDigitalPhotos.net

Linear beschränkte Turingmaschinen: Idee

- Linear beschränkte Turingmaschinen dürfen nur den Teil des Bandes verwenden, der durch das Eingabewort belegt wird.
- Kann vorderes Ende der Eingabe im ersten Schritt markieren.
- Problem: Muss verhindern, über das hintere Bandende hinauszulaufen
- Für Sprache über Σ hat linear beschränkte Turingmaschine modifiziertes Eingabealphabet $\Sigma \cup \{\hat{a} \mid a \in \Sigma\}$.
- Eigentliche Eingabe $a_1 \dots a_n$ wird auf dem Band repräsentiert als $a_1 \dots a_{n-1}\hat{a}_n$.

Linear beschränkte Turingmaschinen: Definition

Definition (Linear beschränkte NTM)

Eine (nichtdeterministische) Turingmaschine heisst linear beschränkt, wenn für alle $a_1 \dots a_n \in \Sigma^+$ und alle Konfigurationen $w_1 z w_2$ mit $z_0 a_1 \dots a_{n-1}\hat{a}_n \vdash^* w_1 z w_2$ gilt $|w_1 w_2| = n$.

Linear beschränkte NTMs akzeptieren Typ-1-Sprachen

Satz

Die von linear beschränkten, nichtdeterministischen Turingmaschinen (LBAs) akzeptierbaren Sprachen sind genau die kontextsensitiven (Typ 1) Sprachen.

Beweis.

„$\Leftarrow$“ Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextsensitive Grammatik. Wir beschreiben eine TM M mit $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(G)$. ...

Linear beschränkte NTMs akzeptieren Typ-1-Sprachen

Beweis (Fortsetzung).

Gestartet auf Eingabe $x \in \Sigma^*$ wählt M nichtdeterministisch eine Regel $u \to v \in P$ und sucht ein Vorkommen von v auf dem Band. Falls sie eines findet, ersetzt sie v durch u, wobei im Fall $|u| < |v|$ die Bandsymbole hinter u entsprechend nach vorne verschoben werden. Falls der nicht-leere Teil des Bandes nur noch aus der Startvariable S besteht, wechselt die TM in einen Endzustand. Sonst wiederholt sie die nichtdeterministische Ersetzung. Es gilt:

$x \in \mathcal{L}(G)$ gdw. es gibt Ableitung $S \Rightarrow \cdots \Rightarrow x$ mit G
gdw. es gibt Rechnung von M, die diese Ableitung in umgekehrter Richtung simuliert
gdw. $x \in \mathcal{L}(M)$

Da für $u \to v \in P$ gilt, dass $|u| \leq |v|$, ist M linear beschränkt.

...

Linear beschränkte NTMs akzeptieren Typ-1-Sprachen

Beweis (Fortsetzung).

„$\Rightarrow$“ Sei M eine LBA. Wir konstruieren Grammatik G, die auf Wörten operiert, die Konfigurationen von M entsprechen.
Die Wörter sollen nicht länger werden als die Eingabe. Verwende daher Alphabet $\Delta = \Gamma \cup (Z \times \Gamma)$. Eine Konfiguration $azbcd$ wird dann z.B. durch das Wort $a(z, b)cd$ repräsentiert.

Ein δ-Übergang $(z', b, L) \in \delta(z, a)$ von M kann dann zum Beispiel durch Grammatikregeln $c(z, a) \to (z', c)b$ für alle $c \in \Gamma$ beschrieben werden.

Die Menge aller solcher Regeln sei P'. Dann gilt $k \vdash_M^* k'$ gdw. $\tilde{k} \Rightarrow \tilde{k}'$ mit P', wobei $\tilde{k}$ die oben beschriebene Darstellung von k ist.

...

Linear beschränkte NTMs akzeptieren Typ-1-Sprachen

Beweis (Fortsetzung).

Insgesamt wollen wir eine Grammatik konstruieren, die folgendermassen Wörter $a_1 \dots a_n$ ableiten kann:

1. $S \Rightarrow^* ((z_0, a_1), a_1)(a_2, a_2) \dots (a_{n-1}, a_{n-1})(\hat{a}_n, a_n)$,
   wobei die erste Komponente dabei eine TM-Konfiguration, und die zweite Komponente das Eingabewort ist.
   Idee: Starte von Startkonfiguration.
2. $\cdots \Rightarrow^* (\gamma_1, a_1) \dots (\gamma_n, a_n)$, wobei für ein $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt $\gamma_i \in E \times \Gamma$ und für alle $j \neq i$ gilt $\gamma_j \in \Gamma$.
   Idee: Simuliere Berechnung der TM auf erster Komponente (mit Regeln aus P') bis Endzustand erreicht ist.
3. $\cdots \Rightarrow^* a_1 \dots a_n$
   Idee: Lösche dann erste Komponente.

...

Linear beschränkte NTMs akzeptieren Typ-1-Sprachen

Beweis (Fortsetzung).

Dies wird durch die Grammatik $G = (\Sigma, V, P, S)$ erreicht, wobei:

$$
\begin{aligned}
V = {} & \{S, A\} \cup (\Delta \times \Sigma) \\
P = {} & \{S \to A(\hat{a}, a) \mid a \in \Sigma\} \cup \\
& \{A \to A(a, a) \mid a \in \Sigma\} \cup \\
& \{A \to ((z_0, a), a) \mid a \in \Sigma\} \cup \\
& \{(\alpha_1, a)(\alpha_2, b) \to (\beta_1, a)(\beta_2, b) \mid \alpha_1\alpha_2 \to \beta_1\beta_2 \in P', \\
& \qquad\qquad a, b \in \Sigma\} \cup \\
& \{((z, a), b) \to b \mid z \in E, a \in \Gamma, b \in \Sigma\} \cup \\
& \{(a, b) \to b \mid a \in \Gamma, b \in \Sigma\}
\end{aligned}
$$

Offensichtlich sind alle Regeln vom Typ 1. □

NTMs akzeptieren Typ-0-Sprachen

Satz

Die durch nichtdeterministische Turingmaschinen akzeptierbaren Sprachen sind genau die Typ-0-Sprachen.

Beweisskizze.

Analog zum Beweis für LBAs und kontextsensitive Sprachen.

Deterministische Turingmaschinen

Definition (Deterministische Turingmaschine)

Eine deterministische Turingmaschine (DTM) ist eine Turingmaschine $M = \langle Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E \rangle$ mit $\delta : (Z \setminus E) \times \Gamma \to Z \times \Gamma \times \{\mathrm{L}, \mathrm{R}, \mathrm{N}\}$.

Deterministische Turingmaschinen

Satz

Für jede Typ-0-Sprache L gibt es eine deterministische Turingmaschine M mit $\mathcal{L}(M) = L$.

Beweisskizze.

Sei M' eine nichtdeterministische Turingmaschine mit $\mathcal{L}(M') = L$. Man konstruiert eine deterministische Turingmaschine, die systematisch den Berechnungsbaum von M' nach einer Konfiguration mit Endzustand untersucht.

Bemerkung: Es ist ein offenes Problem, ob der Satz analog für Typ-1-Sprachen und deterministische LBAs gilt.

11.3 Abschlusseigenschaften und Entscheidbarkeit

Abschlusseigenschaften

	Schnitt	Vereinigung	Komplement	Produkt	Stern
Typ 3	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja
Typ 2	Nein	Ja	Nein	Ja	Ja
Typ 1	Ja(1)	Ja(3)	Ja(1)	Ja(3)	Ja(3)
Typ 0	Ja(3)	Ja(3)	Nein(2)	Ja(3)	Ja(3)

Beweise?
(1) ohne Beweis
(2) Beweis in späteren Vorlesungskapiteln
(3) Beweis in den Übungen

Entscheidbarkeit

	Wort-problem	Leerheits-problem	Äquivalenz-problem	Schnitt-problem
Typ 3	Ja	Ja	Ja	Ja
Typ 2	Ja	Ja	Nein	Nein
Typ 1	Ja	Nein(1)	Nein(1)	Nein(1)
Typ 0	Nein(2)	Nein(2)	Nein(2)	Nein(2)

(1) ohne Beweise (2) Beweis in Vorlesungsabschnitt 3

Wortproblem bei kontextsensitiven Sprachen:
Mit Typ-1-Grammatiken werden Wörter durch Ableitungen niemals kürzer, daher kann man alle Ableitungsmöglichkeiten bis zur Grösse des gegebenen Wortes ausprobieren.

11.4 Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Turingmaschinen haben zwar nur endlich viele Zustände, aber ein unendlich grosses Band als „Speicher“.
- Turingmaschinen akzeptieren genau die Typ-0-Sprachen.
  Dies gilt auch für deterministische Turingmaschinen.
- Linear beschränkte Turingmaschinen akzeptieren genau die kontextsensitiven Sprachen.
- Die kontextsensitiven und Typ-0-Sprachen sind unter fast allen gängigen Operationen abgeschlossen.
  Ausnahme: Typ-0 nicht unter Komplement abgeschlossen
- Für kontextsensitive und Typ-0-Sprachen ist fast kein Problem entscheidbar.
  Ausnahme: Wortproblem für Typ-1 ist entscheidbar.