Theorie der Informatik

8. Reguläre Sprachen II

Malte Helmert Gabriele Röger

Universität Basel

24. März 2014

8.1 Pumping Lemma

Pumping Lemma: Motivation

Man kann zeigen, dass eine Sprache regulär ist, indem man eine geeignete Grammatik, endlichen Automaten oder regulären Ausdruck angibt. Wie kann man zeigen, dass eine Sprache nicht regulär ist?

- Direkter Beweis, dass keine reguläre Grammatik existiert, die die Sprache erzeugt
  $\rightsquigarrow$ i.A. schwierig
- Pumping Lemma: Notwendige Eigenschaft, die für alle regulären Sprachen gelten muss.

Pumping Lemma

Satz (Pumping Lemma)

Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ (eine Pumpingzahl für L), so dass sich alle Wörter $x \in L$ mit $|x| \geq n$ zerlegen lassen in $x = uvw$, so dass folgendes gilt:

1. $|v| \geq 1$,
2. $|uv| \leq n$, *und*
3. *für alle* $i = 0, 1, 2, \ldots$ *gilt:* $uv^i w \in L$.

Pumping Lemma: Beweis

Satz (Pumping Lemma)

Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass sich alle Wörter $x \in L$ mit $|x| \geq n$ zerlegen lassen in $x = uvw$, so dass:

1. $|v| \geq 1$,
2. $|uv| \leq n$, *und*
3. *für alle* $i = 0, 1, 2, \ldots$ *gilt:* $uv^i w \in L$.

Beweis.

Für reguläres L existiert DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ mit $\mathcal{L}(M) = L$. Wir zeigen, dass $n = |Z|$ die geforderten Eigenschaften hat.

Betrachte beliebiges $x \in \mathcal{L}(M)$ mit Länge $|x| \geq |Z|$. Inklusive dem Startzustand durchläuft M beim Abarbeiten von x insgesamt $|x| + 1$ Zustände. Wegen $|x| \geq |Z|$ muss daher mindestens ein Zustand mehrfach durchlaufen werden. ...

Pumping Lemma: Beweis

Satz (Pumping Lemma)

Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass sich alle Wörter $x \in L$ mit $|x| \geq n$ zerlegen lassen in $x = uvw$, so dass:

1. $|v| \geq 1$,
2. $|uv| \leq n$, *und*
3. *für alle* $i = 0, 1, 2, \ldots$ *gilt:* $uv^i w \in L$.

Beweis (Fortsetzung).

Wähle Zerlegung $x = uvw$, so dass M nach Lesen von u und Lesen von uv im gleichen Zustand ist. Offensichtlich können wir die Zerlegung so wählen, dass $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq |Z|$ erfüllt sind. ...

Pumping Lemma: Beweis

Satz (Pumping Lemma)

Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass sich alle Wörter $x \in L$ mit $|x| \geq n$ zerlegen lassen in $x = uvw$, so dass:

1. $|v| \geq 1$,
2. $|uv| \leq n$, *und*
3. *für alle* $i = 0, 1, 2, \ldots$ *gilt:* $uv^i w \in L$.

Beweis (Fortsetzung).

Das Teilwort v entspricht nach Abarbeitung von u einer Schleife in dem DFA und kann daher beliebig oft durchlaufen werden. Jede anschliessende Fortsetzung mit w endet im selben Endzustand wie die Abarbeitung von x. Daher gilt für alle $i = 0, 1, 2, \ldots$, dass $uv^i w \in \mathcal{L}(M) = L$. □

Pumping Lemma: Verwendung

Verwendung des Pumping Lemma (PL):

Beweis der Nichtregularität

- Wenn L regulär ist, dann gilt PL für L
- Wenn PL für L gilt, kann man nichts über L aussagen.
- Aber: Wenn PL für L nicht gilt, kann L nicht regulär sein.
- D.h.: Wenn es kein $n \in \mathbb{N}$ mit den geforderten Eigenschaften für PL gibt, dann kann L nicht regulär sein.

Pumping Lemma: Beispiel

Beispiel

Die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

Angenommen L ist regulär. Dann sei p eine Pumpingzahl für L.

Das Wort $x = a^p b^p$ ist in L und hat Länge $\geq p$. Sei $x = uvw$ eine Zerlegung mit den Eigenschaften aus dem PL.

Dann ist auch das Wort $x' = uv^2w$ in L. Da $|uv| \leq p$ besteht uv nur aus Symbolen a und $x' = a^{|u|}a^{2|v|}a^{p-|uv|}b^p = a^{p+|v|}b^p$.

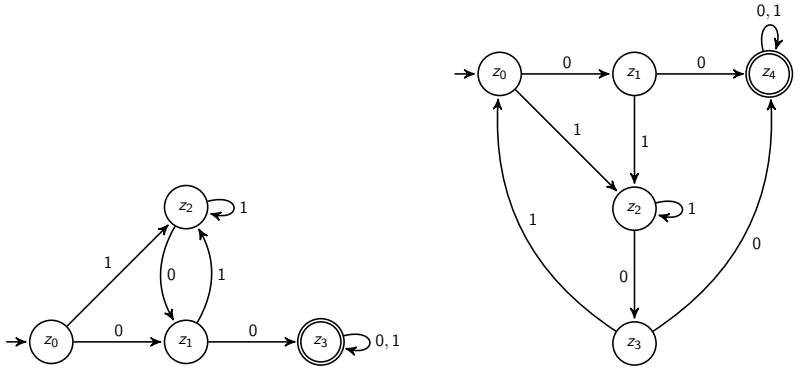
Da $|v| \geq 1$ gilt $p + |v| \neq p$ und damit $x' \notin L$.

Dies ist ein Widerspruch zum PL. $\rightsquigarrow$ L nicht regulär. □

8.2 Minimalautomaten

Beispiel

Folgende DFAs akzeptieren die gleiche Sprache:



Frage: Was ist der kleinste DFA, der diese Sprache akzeptiert?

Minimalautomat: Definition

Definition

Ein Minimalautomat für eine reguläre Sprache L ist ein DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ mit $\mathcal{L}(M) = L$ und einer minimalen Anzahl von Zuständen. Das heisst, es gibt keinen DFA $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ mit $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$ und $|Z'| < |Z|$.

Wie findet man einen Minimalautomaten?

Idee:

- Beginne mit irgendeinem DFA, der die Sprache akzeptiert.
- Verschmelze Zustände, von denen aus die gleichen Wörter in Endzustand führen.

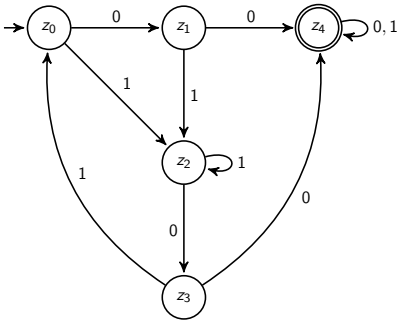
Minimalautomat: Algorithmus

Eingabe: DFA M
(ohne vom Startzustand aus unerreichbare Zustände)

Ausgabe: Angabe, welche Zustände man verschmelzen muss, um äquivalenten Minimalautomaten zu erhalten

1. Stelle Tabelle aller Zustandspaare $\{z, z'\}$ mit $z \neq z'$ auf.
2. Markiere alle Paare $\{z, z'\}$ mit $z \in E$ und $z' \notin E$.
3. Falls für ein unmarkiertes Paar $\{z, z'\}$ gilt, dass $\{\delta(z, a), \delta(z', a)\}$ für ein $a \in \Sigma$ bereits markiert ist, markiere auch $\{z, z'\}$.
4. Wiederhole den letzten Schritt, bis sich keine Änderung mehr ergibt.
5. Alle jetzt noch unmarkierten Paare können jeweils zu einem Zustand verschmolzen werden.

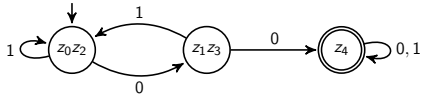
Minimalautomat: Beispiel



z_1	×			
z_2		×		
z_3	×		×	
z_4	×	×	×	×
	z_0	z_1	z_2	z_3

Zustände z_0, z_2 und z_1, z_3 können jeweils zu einem Zustand verschmolzen werden.

Ergebnis:



Eindeutigkeit von Minimalautomaten

Satz

Alle Minimalautomaten für eine Sprache L sind bis auf Isomorphie (d.h. Umbenennnen der Zustände) identisch.

Ohne Beweis.

8.3 Abschlusseigenschaften

Abschlusseigenschaften

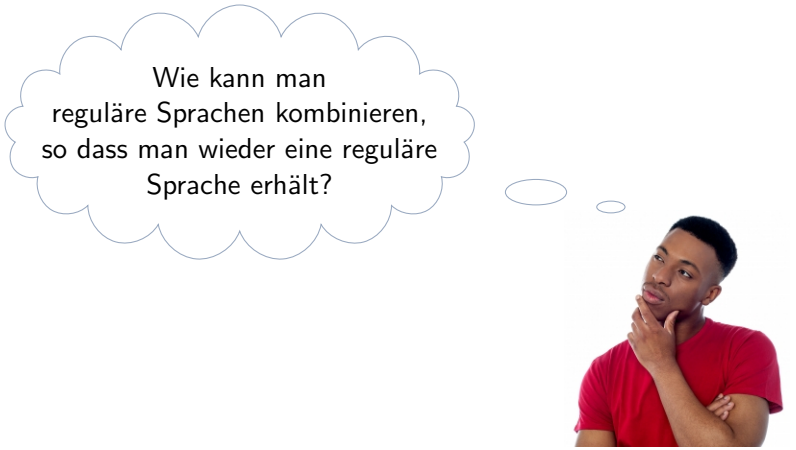


Foto mit freundlicher Genehmigung von stockimages / FreeDigitalPhotos.net

Abschlusseigenschaften: Operationen

Seien L und L' reguläre Sprachen über Σ bzw. Σ'.

Wir betrachten folgende Operationen:

- Vereinigung $L \cup L' = \{w \mid w \in L \text{ oder } w \in L'\}$ über $\Sigma \cup \Sigma'$
- Schnitt $L \cap L' = \{w \mid w \in L \text{ und } w \in L'\}$ über $\Sigma \cap \Sigma'$
- Komplement $\overline{L} = \{w \mid w \notin L\}$ über Σ
- Produkt $LL' = \{uv \mid u \in L \text{ und } v \in L'\}$ über $\Sigma \cup \Sigma'$
  Spezialfall: $L^n = L^{n-1}L$, wobei $L^0 = \{\varepsilon\}$
- Stern $L^* = \bigcup_{k \geq 0} L^k$ über Σ

Abschlusseigenschaften

Definition (Abgeschlossenheit)

Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von Sprachen. Dann ist $\mathcal{K}$ abgeschlossen unter Vereinigung (Schnitt, Komplement, Produkt, Stern), falls aus $L \in \mathcal{K}$ und $L' \in \mathcal{K}$ folgt, dass $L \cup L' \in \mathcal{K}$ (bzw. $L \cap L' \in \mathcal{K}$, $\overline{L} \in \mathcal{K}$, $LL' \in \mathcal{K}$, $L^* \in \mathcal{K}$).

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen unter:

- *Vereinigung*
- *Schnitt*
- *Komplement*
- *Produkt*
- *Stern*

Abschlusseigenschaften

Beweis.

Abschluss unter Vereinigung, Produkt und Stern folgt daraus, dass für reguläre Ausdrücke α und β auch $(\alpha|\beta)$, $(\alpha\beta)$ und (α^*) reguläre Ausdrücke sind.

Komplement: Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA mit $\mathcal{L}(M) = L$. Dann ist $M' = (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z \setminus E)$ ein DFA mit $\mathcal{L}(M') = \bar{L}$. akzeptiert.

Schnitt: Seien $M_1 = (Z_1, \Sigma_1, \delta_1, z_{01}, E_1)$ und $M_2 = (Z_2, \Sigma_2, \delta_2, z_{02}, E_2)$ DFAs. Der Kreuzproduktautomat

$$M = (Z_1 \times Z_2, \Sigma_1 \cap \Sigma_2, \delta, (z_{01}, z_{02}), E_1 \times E_2)$$

$$\text{mit } \delta((z_1, z_2), a) = (\delta_1(z_1, a), \delta_2(z_2, a))$$

akzeptiert $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M_1) \cap \mathcal{L}(M_2)$. □

8.4 Entscheidbarkeit

Entscheidbarkeit

Definition (Entscheidbarkeit (intuitiv))

Eine Sprache L über Σ heisst entscheidbar, wenn es einen Algorithmus gibt, der bei jeder Eingabe eines Wortes $w \in \Sigma^*$ terminiert und ausgibt, ob $w \in L$ oder nicht.

Probleme als Sprachen

Beispiel (Leerheitsproblem)

Das Leerheitsproblem $\mathrm{P}_\emptyset$ ist folgendes Problem:

Gegeben: Reguläre Grammatik G
Gefragt: Ist $\mathcal{L}(G) = \emptyset$?

Oder alternativ als Sprache formuliert:

$$\mathrm{P}_\emptyset = \{w \mid w \text{ kodiert eine Grammatik } G \text{ mit } \mathcal{L}(G) = \emptyset\}$$

Gegeben-Gefragt-Notation vs. Definition als Menge

Definition (neues Problem P)

Gegeben: Instanz $\mathcal{I}$
Gefragt: Hat $\mathcal{I}$ eine bestimmte Eigenschaft?

entspricht der Definition

Definition (neues Problem P)

Das Problem P ist die Sprache
$\mathrm{P} = \{w \mid w \text{ kodiert eine Instanz } \mathcal{I} \text{ mit der gefragten Eigenschaft}\}$.

Entscheidbarkeit: Wortproblem

Satz (Wortproblem ist entscheidbar)

Das Wortproblem $\mathrm{P}_\in$ für reguläre Sprachen ist:

Gegeben: *Reguläre Grammatik G mit Terminalalphabet Σ und Wort $w \in \Sigma^*$*
Gefragt: *Ist $w \in \mathcal{L}(G)$?*

Das Wortproblem ist entscheidbar.

Beweis.

Konstruiere einen DFA M mit $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(G)$ (die Beweise aus dem vorherigen Kapitel beschreiben ein geeignetes Verfahren). Simuliere M auf Eingabe w. Die Simulation endet nach $|w|$ Schritten. Der DFA M ist dann in einem Endzustand gdw. $w \in \mathcal{L}(G)$. □

Entscheidbarkeit: Leerheitsproblem

Satz (Leerheitsproblem ist entscheidbar)

Das Leerheitsproblem $\mathrm{P}_\emptyset$ für reguläre Sprachen ist:

Gegeben: *Reguläre Grammatik G*
Gefragt: *Ist $\mathcal{L}(G) = \emptyset$?*

Das Leerheitsproblem ist entscheidbar.

Beweis.

Konstruiere einen DFA M mit $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(G)$. Im Zustandsdiagramm von M gibt es keinen Pfad vom Startzustand zu einem Endzustand gdw. $\mathcal{L}(G) = \emptyset$. □

Entscheidbarkeit: Endlichkeitsproblem

Satz (Endlichkeitsproblem ist entscheidbar)

Das Endlichkeitsproblem P_∞ für reguläre Sprachen ist:

Gegeben: *Reguläre Grammatik G*
Gefragt: *Ist $|\mathcal{L}(G)| < \infty$?*

Das Endlichkeitsproblem ist entscheidbar.

Beweis.

Konstruiere einen DFA M mit $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(G)$. Im Zustandsdiagramm von M gibt es einen Zyklus, der vom Startzustand aus erreichbar ist und von dem aus ein Endzustand erreichbar ist, gdw. $|\mathcal{L}(G)| = \infty$. □

Entscheidbarkeit: Schnittproblem

Satz (Schnittproblem ist entscheidbar)

Das Schnittproblem $\mathrm{P}_\cap$ für reguläre Sprachen ist:

Gegeben: *Reguläre Grammatiken G und G'*
Gefragt: *Ist $\mathcal{L}(G) \cap \mathcal{L}(G') = \emptyset$?*

Das Schnittproblem ist entscheidbar.

Beweis.

Da die regulären Sprachen unter Schnitt abgeschlossen sind, konstruieren wir (z.B. über den Zwischenschritt eines Kreuzproduktautomaten) eine Grammatik G'' mit $\mathcal{L}(G'') = \mathcal{L}(G) \cap \mathcal{L}(G')$ und verwenden das Entscheidungsverfahren für das Leerheitsproblem $\mathrm{P}_\emptyset$. □

Entscheidbarkeit: Äquivalenzproblem

Satz (Äquivalenzproblem ist entscheidbar)

Das Äquivalenzproblem $\mathrm{P}_=$ für reguläre Sprachen ist:

Gegeben: *Reguläre Grammatiken G und G'*
Gefragt: *Ist $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G')$?*

Das Äquivalenzproblem ist entscheidbar.

Beweis.

Es gilt allgemein für Sprachen L und L', dass

$$L = L' \text{ gdw. } (L \cap \overline{L'}) \cup (\overline{L} \cap L') = \emptyset.$$

Die regulären Sprachen sind unter Schnitt, Vereinigung und Komplement abgeschlossen. Wir können eine entsprechende Grammatik konstruieren und das Entscheidungsverfahren für das Leerheitsproblem $\mathrm{P}_\emptyset$ verwenden. □

8.5 Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Mit dem Pumping Lemma kann man zeigen, dass eine Sprache nicht regulär ist.
- Minimalautomaten sind kleinste mögliche DFAs für eine Sprache und für jede Sprache eindeutig.
- Die regulären Sprachen sind unter allen gängigen Operationen abgeschlossen.
- Die gängigen Probleme sind für die regulären Sprachen entscheidbar.